TS. NGUYỄN CAM (Chủ biên)
ThS. NGUYỄN VĂN PHƯỚC

TUYỂN CHỌN
400
BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH
11

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. NGUYỄN CAM (Chủ biên)
ThS. NGUYỄN VĂN PHƯỚC

TUYỂN CHỌN 400 BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

11

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn ***"Tuyển chọn 400 Đề Toán Đại Số và Giải Tích lớp 11"*** được biên soạn theo chương trình mới nhất do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành. Nội dung bao gồm 5 chương:

- ***Chương I:*** Hàm số lượng giác và Phương trình lượng giác với nội dung chi tiết gồm: với hàm lượng giác sẽ có định nghĩa, tính tuần hoàn (chu kỳ) và đồ thị. Với phương trình lượng giác sẽ có phương trình cơ bản, và một số phương trình thường gặp.
- ***Chương II:*** Tổ hợp và xác suất. Trong chương này có các nội dung sau: Quy tắc cộng và quy tắc nhân; chỉnh hợp; hoán vị và tổ hợp; nhị thức Newton; xác suất của biến cố và các tính chất.
- ***Chương III:*** Dãy số và cấp số. Trong chương này có phương pháp quy nạp Toán học; dãy số đơn điệu; dãy số bị chặn và sau đó là bàn về cấp số cộng và cấp số nhân.
- ***Chương IV:*** Giới hạn. Chi tiết gồm giới hạn của dãy số; giới hạn của hàm số và hàm số liên tục.
- ***Chương V:*** Đạo hàm: định nghĩa, công thức tính, quy tắc tính, ý nghĩa hình học và cơ học của đạo hàm, tiếp tuyến của đồ thị.

Cấu trúc trình bày mỗi chương là như sau: đầu tiên là phần tóm tắt các kiến thức trong phần lý thuyết và sau đó là một số đề toán đề nghị dành cho học sinh luyện tập giải. Các đề toán được xếp theo thứ tự có độ khó tăng dần để học sinh đọc một cách dễ dàng và tùy theo trình độ cũng như mục đích theo đuổi khác nhau (theo học ban cơ bản hoặc ban nâng cao, hoặc chỉ nâng cao môn Toán) đều có thể sử dụng một cách hợp lý. Ở cuối mỗi chương, chúng tôi giới thiệu các đề toán dưới dạng trắc nghiệm để học sinh thực hành. Đây là cách giúp học sinh làm quen với phương cách thi mới mà thí sinh sẽ gặp trong các kỳ thi tốt nghiệm cũng như tuyển sinh vào các trường đại học. Cuối cùng chúng tôi giới thiệu các đề ôn tập toàn chương ở cả hai hình thức là đề dạng tự luận và dạng trắc nghiệm nhằm giúp các em học sinh ôn tập thi cuối năm học.

Dù đã nổ lực rất nhiều khi biên soạn cuốn sách này nhưng chắc rằng không tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được các góp ý của quý độc giả để có thể hoàn thiện cuốn sách nhằm phục vụ tốt hơn nữa việc học tập các em học sinh.

TP.HCM, tháng 5 năm 2007

Thay mặt các tác giả

TS. Nguyễn Cam

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

* Hàm số lượng giác

* Phương trình lượng giác cơ bản

* Một số phương trình lượng giác đơn giản

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa

1. Hàm số sin và hàm số cosin

a) Hàm số sin

Một qui tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực y = sinx được gọi là hàm số sin.

$$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = \sin x$$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

* $y = \sin x$ là hàm số lẻ

b) Hàm số cosin

Một qui tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực y = cosx được gọi là hàm số cosin

$$\text{cosin}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = \cos x$$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

* $y = \cos x$ là hàm số chẵn

Chú ý:

Ta có: * $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

* $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

2. Hàm số tang và hàm số cotang

a) Hàm số tang

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$(\cos x \neq 0)$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

* $y = \tan x$ là hàm số lẻ

b) Hàm số cotang

Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \ (\sin x \neq 0)$$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

* $y = \cot x$ là hàm số lẻ

II. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác

Định nghĩa:

Hàm số f(x) có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

a) $x - T \in D$ *và* $x + T \in D$

b) $f(x + T) = f(x)$

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f(x).

* Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$

* Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$

* Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

* Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

III. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lượng giác

1. Hàm số y = sinx

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

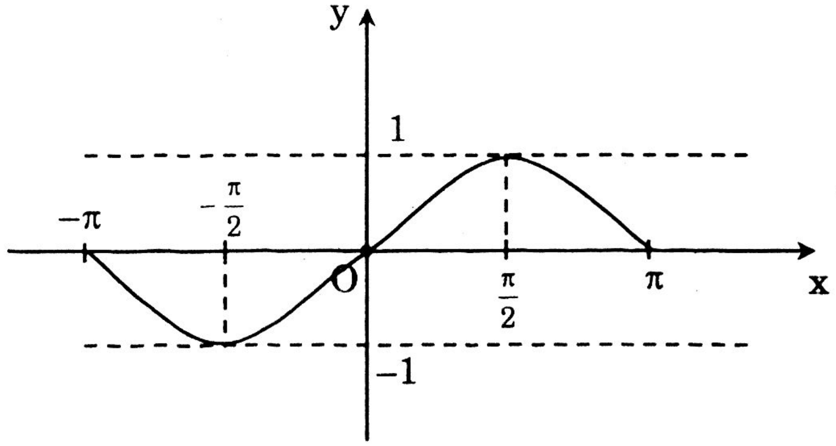
b) y = sinx là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$

c) Bảng biến thiên trên đoạn $[-\pi; \pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = sinx	0	↘	−1	↗	0	↗	1	↘	0

d) Đồ thị trên đoạn $[-\pi, \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y = sinx	0	−1	0	1	0



Chú ý: Nhờ tính tuần hoàn, ta có thể suy ra đồ thị của hàm số y = sinx trên ℝ

2. Hàm số y = cosx

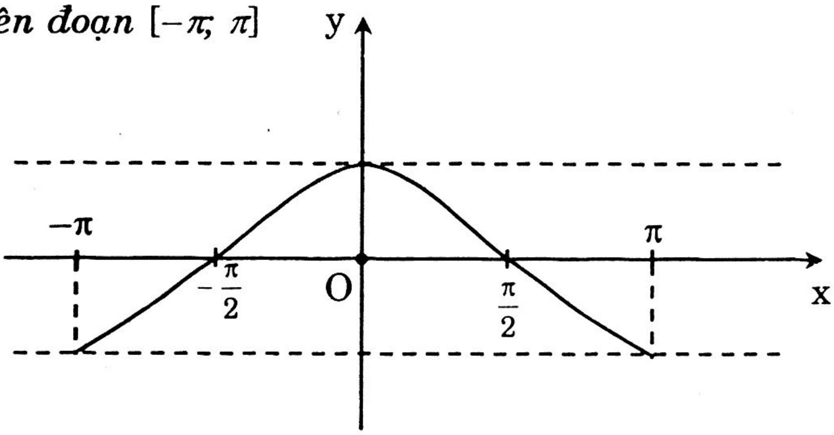
a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

b) y = cosx là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$

c) Bảng biến thiên trên đoạn $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = cosx	−1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	−1

d) Đồ thị trên đoạn $[-\pi; \pi]$



Chú ý: Nhờ tính tuần hoàn, ta có thể suy ra đồ thị của hàm số
y = cosx trên ℝ.

3. *Hàm số y = tanx*

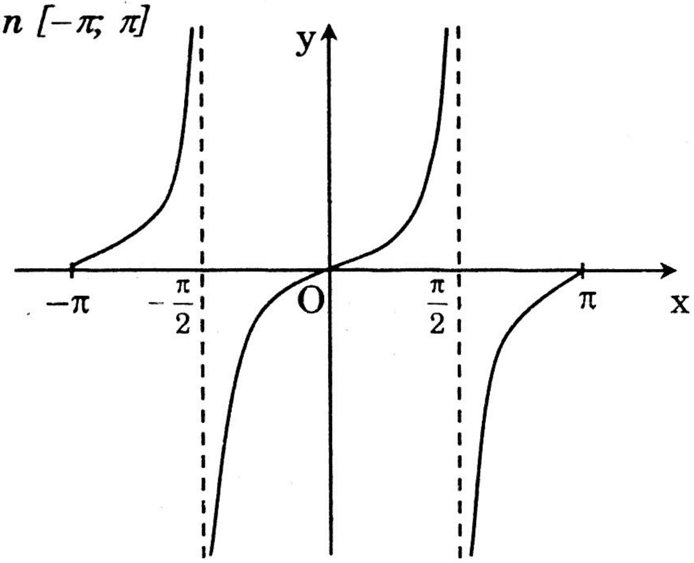
a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) y = tanx là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

c) Bảng biến thiên trên đoạn $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = tanx	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

d) Đồ thị trên đoạn $[-\pi; \pi]$



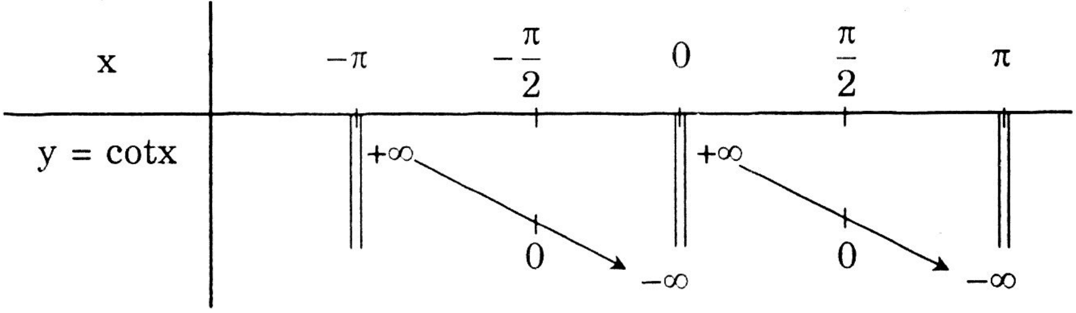
Chú ý: Nhờ tính tuần hoàn, ta có thể suy ra đồ thị của hàm số
y = tanx trên ℝ.

4. Hàm số y = cotx

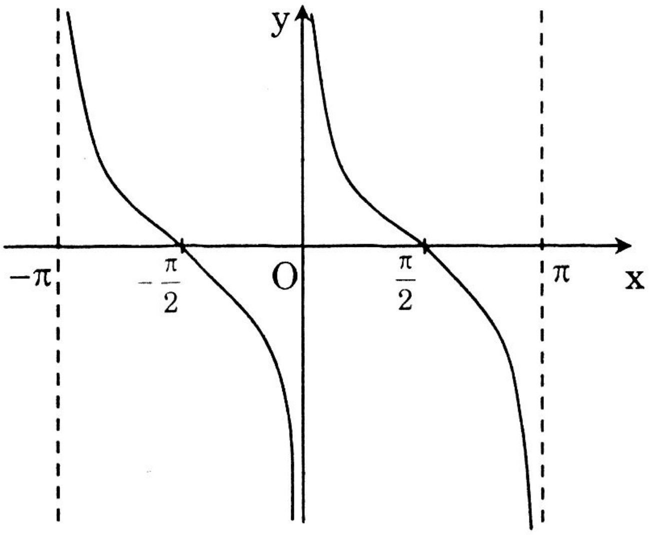
a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) y = cotx là hàm lẻ và tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

c) Bảng biến thiên trên đoạn $[-\pi, \pi]$


x
−π
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
y = cotx
+∞
0
−∞
+∞
0
−∞

d) Đồ thị trên đoạn $[-\pi, \pi]$



Chú ý: Nhờ tính tuần hoàn, ta có thể suy ra đồ thị của hàm số y = cotx trên R.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 1: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ b) $y = \dfrac{\cos x + 1}{\cos x}$

Hướng dẫn giải

1. Hàm số $y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ xác định khi và chỉ khi $1 - \sin x \neq 0$

hay: $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Hàm số $y = \dfrac{\cos x + 1}{\cos x}$ xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq 0$

hay: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Vậy tập xác định; $D = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi /k \in \mathbb{Z}\}$

Đề 2: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x}}{1 - \cos x}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{1 - \sin x}}{\cos^2 x}$

Hướng dẫn giải

a) Vì $1 + \sin x \geq 0$; $1 - \cos x \geq 0$ với mọi x nên: $\dfrac{\sqrt{1 + \sin x}}{1 - \cos x} \geq 0$ với

mọi x thỏa điều kiện $1 - \cos x \neq 0$

Vậy hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \text{cox} \neq 0$

hay $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Vậy tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

b) Vì $1 - \sin x \geq 0$, $\cos^2 x \geq 0$ với mọi x nên $\dfrac{\sqrt{1 - \sin x}}{\cos^2 x} \geq 0$ với mọi x

thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Vậy tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Đề 3: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \tan x + \cot x$ b) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

a) * tanx xác định khi và chỉ khi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

* cotx xác định khi và chỉ khi $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Vậy $y = \tan x + \cot x$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{hay} \quad x \neq \dfrac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) $y = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$ xác định khi và chỉ khi

$$2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hay } x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Đề 4: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \tan x + \sin 2x$ b) $y = \cos x + \sin^2 x$

Hướng dẫn giải

a) $y = f(x) = \tan x + \sin 2x$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ta có: * $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$

* $\forall x \in D$, $f(-x) = \tan(-x) + \sin(-2x)$

$$= -\tan x - \sin 2x$$

$$= -(\tan x + \sin 2x)$$

$$= -f(x)$$

Vậy f(x) là hàm số lẻ

b) $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: * $x \in D \Rightarrow -x \in D$

* $\forall x \in D$, $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$

$$= \cos x + (-\sin x)^2$$

$$= \cos x + \sin^2 x$$

$$= f(x)$$

Vậy f(x) là hàm số chẵn

Đề 5: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số:

a) $y = \cos x.\sin 2x$ b) $y = \frac{\cot x}{1 + \sin^2 x}$

Hướng dẫn giải

a) $y = f(x) = \cos x.\sin 2x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $* \; x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$* \; \forall x \in D;\ f(-x) = \cos(-x).\sin(-2x)$$

$$= -\cos x.\sin 2x$$

$$= -f(x)$$

Vậy: $y = \cos x.\sin 2x$ là hàm số lẻ

b) $y = f(x) = \dfrac{\cot x}{1 + \sin^2 x}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,/ k \in \mathbb{Z}\}$

Ta có: $* \; x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$* \; \forall x \in D,\ f(-x) = \frac{\cot(-x)}{1 + \sin^2(-x)}$$

$$= -\frac{\cot x}{1 + \sin^2 x}$$

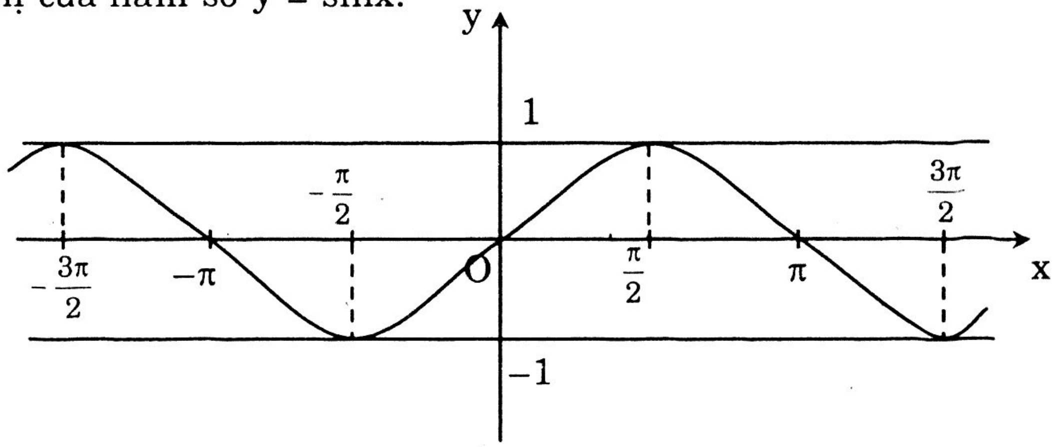
$$= -f(x)$$

Vậy: $y = \dfrac{\cot x}{1 + \sin^2 x}$ là hàm số lẻ

Đề 6: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$..

Hướng dẫn giải

* Đồ thị của hàm số $y = \sin x$:



* Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$

Theo định nghĩa trị tuyệt đối, ta có:

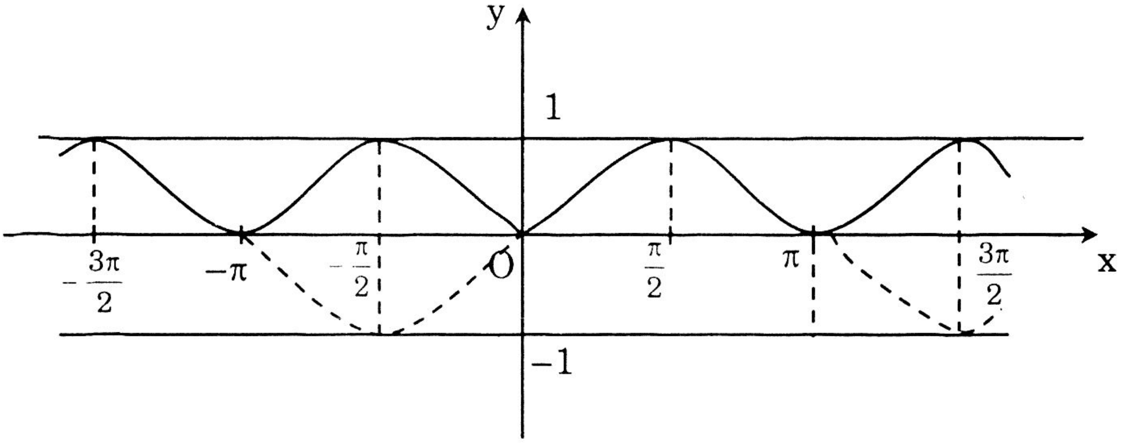
$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ nếu } \sin x \ge 0 \\ -\sin x \text{ nếu } \sin x \ge 0 \end{cases}$$

Như vậy, đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ trên toàn trục số được suy ra bằng cách như sau:

– Giữ nguyên phần đồ thị $y = \sin x$ nằm trên trục hoành.

– Bỏ đi phần đồ thị $y = \sin x$ nằm dưới trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị vừa bỏ đi.

Đồ thị hàm $y = |\sin x|$ được vẽ như sau:



Đề 7: Chứng minh hàm số $y = f(x) = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$, tức là: $f(x + \pi) = f(x), \forall x$ (1) và $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa điều kiện (1)

Hướng dẫn giải

$y = f(x) = \sin 2x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

* $\forall x \in D$, ta có: $f(x + \pi) = \sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = f(x)$

* Giả sử có số T_0 sao cho $0 < T_0 < \pi$ và: $f(x + T_0) = f(x), \forall x$

Cho $x = \frac{\pi}{4}$, ta được:

$$\sin 2(\frac{\pi}{4} + T_0) = \sin 2.\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + 2T_0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2T_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow T_0 = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Điều này trái với giả thiết $0 < T_0 < \pi$

Nghĩa là $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa điều kiện $f(x + T) = f(x), \forall x$

Vậy $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$

Đề 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 3 + \frac{1}{4}\sin x.\cos x$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y = 3 + \frac{1}{4}\sin x.\cos x = 3 + \frac{1}{8}\sin 2x$

$\forall x$, ta có: $-1 \le \sin 2x \le 1$ nên:

$$-\frac{1}{8} \le \frac{1}{8}\sin 2x \le \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - \frac{1}{8} \le 3 + \frac{1}{8}\sin 2x \le 3 + \frac{1}{8}$$

Hay: $\frac{23}{8} \le y \le \frac{25}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\frac{25}{8}$ đạt được khi

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{23}{8}$ đạt được khi

$$\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$

Hướng dẫn giải

$\forall x$, ta có: $-1 \le \sin x \le 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le 1 + \sin x \le 2$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{1 + \sin x} \le \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad -3 \le \sqrt{1 + \sin x} - 3 \le \sqrt{2} - 3$

$\Leftrightarrow \quad -3 \le y \le \sqrt{2} - 3$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\sqrt{2} - 3$, đạt được khi

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

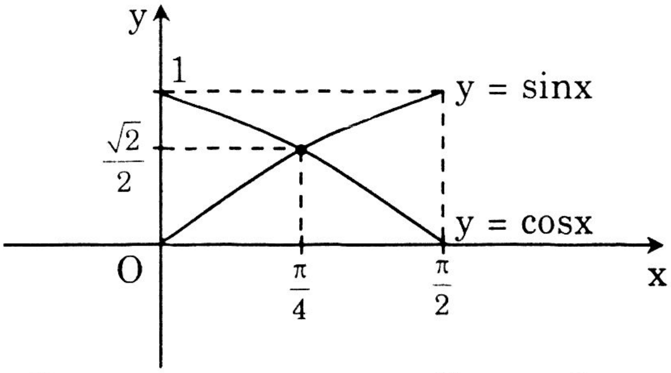
Giá trị nhỏ nhất của y là – 3, đạt được khi

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 10: So sánh tanx và cotx với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

Xét đồ thị của hai hàm số y = sinx và y = cosx trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.



* Với $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ ta có: $0 < \sin x < \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} < \cos x$

$\Rightarrow \tan x < 1 < \cot x$

* Với $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ ta có: $0 < \cos x < \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} < \sin x$

$\Rightarrow \cot x < 1 < \tan x$

* Với $x = \frac{\pi}{4}$, ta có: $\tan x = \cot x = 1$.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 11: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \frac{3 - \cos 2x}{\sin x}$ b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

Đáp số: a) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Đề 12: Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ b) $y = \cot(x + \frac{\pi}{6})$

Đáp số: a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Đề 13: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin x.\cos 3x$ b) $y = \tan x.\sin^2 x$

Đáp số: a) lẻ b) lẻ

Đề 14: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{x-1} + \sin 2x$ b) $y = \sin x + \cos x$

Đáp số: a) Không chẵn, không lẻ

b) Không chẵn, không lẻ

Đề 15: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, vẽ đồ thị của hàm số $y = |\cos x|$.

Đề 16: Chứng minh hàm số $y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.c.

Đề 17: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = 1 + \frac{1}{2}\sin x.\cos x$ b) $y = 2\cos^2 x - 2$

Đáp số: a) giá trị lớn nhất $\frac{5}{4}$, giá trị nhỏ nhất $\frac{3}{4}$

b) giá trị lớn nhất 0, giá trị nhỏ nhất -2

Đề 18: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2 + \cos^2 x}$ b) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Đáp số: a) GTLN $\sqrt{3}$; GTNN $\sqrt{2}$

b) GTLN 1; GTNN $\frac{1}{2}$

Đề 19: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm sôố $y = |\sin x|$ trên đoạn $[0; 2\pi]$

Đáp số: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ taa có kết quả:

– Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

– Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

Đề 20: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = |\tan x|$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đáp số:

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Phương trình lượng giác cơ bản

Phương trình lượng giác cơ bản là các phương trình có dạng:

$$\sin x = a; \cos x = a; \tan x = a; \cot x = a$$

1. Phương trình sinx = a

a) Nếu /a/ > 1: Phương trình vô nghiệm

b) Nếu /a/ ≤ 1: Đưa phương trình về dạng sinx = sinα

Ta có: $$\boxed{\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

Các phương trình đặc biệt:

* $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

* $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

* $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý: Nếu số đo của α được tính bằng độ thì:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k360^0 \\ x = 180^0 - \alpha + k360^0 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Phương trình cosx = a

a) Nếu /a/ > 1: Phương trình vô nghiệm

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/11835

b) Nếu $|a| \le 1$: Đưa phương trình về dạng $\cos x = \cos\alpha$

Ta có: $\boxed{\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

Các phương trình đặc biệt:

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

* $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

* $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý: Nếu số đo của α được tính bằng độ thì:

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k360^0 \ (k \in \mathbb{Z})$$

3. Phương trình tanx = a

Điều kiện: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Đưa phương trình về dạng $\tan x = \tan\alpha$

Ta có: $\boxed{\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

Chú ý: Nếu số đo của α được cho bằng độ thì

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k180^0 \ (k \in \mathbb{Z})$$

4. Phương trình cotx = a

Điều kiện: $x \ne k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Đưa phương trình về dạng $\cot x = \cot\alpha$

Ta có: $\boxed{\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})}$

Chú ý: Nếu số đo của α được cho bằng độ thì

$$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k180^0 \ (k \in \mathbb{Z})$$

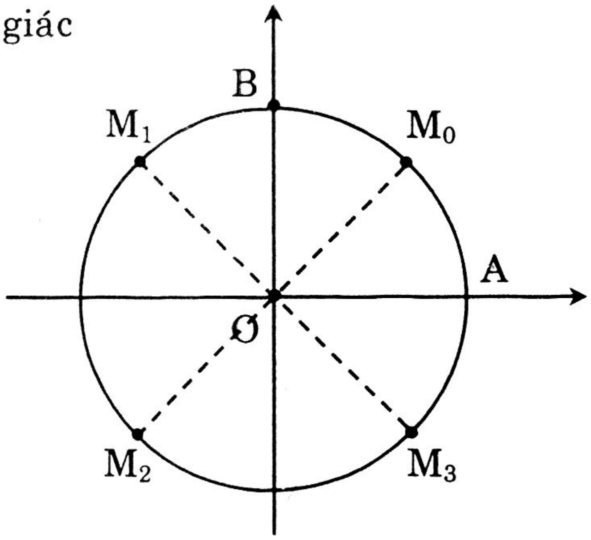
II. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác trêm đường tròn lượng giác

Xét phương trình lượng giác $\cos 2x = 0$ •

Ta có: $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được 4 cung lượng giác $\overset{\frown}{AM_0}$; $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$. Ứng với $k = 0, 1, 2, 3$



Cụ thể:

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AM_0} = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AM_1} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AM_2} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Sđ } \overset{\frown}{AM_3} = \frac{7\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos 2x = 0$ giúp ta hình dung được cách xếp tập nghệm (gồm vô hạn phần tử) trên đường tròn lượng giác.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 21: Giải các phương trình

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có: $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Đề 22: Giải các phương trình

a) $\tan x = \sqrt{3}$ b) $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Ta có: $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = -\cot\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \cot x = \cot(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Chú ý: Các đưa dấu – vào bên trong hàm lượng giác:

1) $-\cos a = \cos(\pi - a)$

2) $-\sin a = \sin(-a)$

3) $-\tan a = \tan(-a)$

4) $-\cot a = \cot(-a)$

Ví dụ: * $-\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}$

* $-\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6})$

Đề 23: Giải các phương trình

a) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

c) $\tan(x + 30^0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\cot(x - 15^0) = -1$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 2x = -\frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = -\frac{13\pi}{24} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có: $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) Ta có: $\tan(x + 30^0) = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(x + 30^0) = -\tan30^0$

$$\Leftrightarrow \tan(x + 30^0) = \tan(-30^0)$$

$$\Leftrightarrow x + 30^0 = -30^0 + k180^0$$

$$\Leftrightarrow x = -60 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$$

d) Ta có: $\cot(x - 15^0) = -1 \Leftrightarrow \cot(x - 15^0) = -\cot45^0$

$$\Leftrightarrow \cot(x - 15^0) = \cot(-45^0)$$

$$\Leftrightarrow x - 15^0 = -45^0 + k180^0$$

$$\Leftrightarrow x = -30^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$$

Đề 24: Giải các phương trình

a) $\sin2x = \cos x$ b) $\cos2x = \sin x$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) $\cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 25: Giải phương trình

$$\cos(3x - \frac{5\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\cos(3x - \frac{5\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

$$\Leftrightarrow \cos(3x - \frac{5\pi}{6}) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{3})\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x - \frac{5\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - x + k2\pi \\ 3x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + x + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \pi + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 26: Với giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

Hướng dẫn giải

Giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau khi và chỉ khi:

$$\sin 3x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k2\pi \\ 4x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 27: Giải các phương trình:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ b) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có: $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x + \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x = -\cos x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x = \cos(\pi - x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \\ 2x = -\pi + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 28: Giải phương trình:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = 4x + k2\pi \\ 6x = -4x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 29: Giải phương trình:

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} - \frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos 6x - \cos 8x = -\cos 10x - \cos 12x$$

$$\Leftrightarrow \cos 12x - \cos 6x + \cos 10x - \cos 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 9x.\sin 3x - 2\sin 9x.\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 9x(\sin 3x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2.\sin 9x.2\sin 2x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 9x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x = k\pi \\ 2x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{9} \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{9} \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 30: Giải phương trình: $\tan 5x.\tan x = 1$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} 5x \neq \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k_1\pi}{5} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi \end{array}\right. (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$

Khi đó: $\tan 5x.\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 5x = \dfrac{1}{\tan x}$ $(\tan x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \tan 5x = \cot x$$

$$\Leftrightarrow \tan 5x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 31: Giải phương trình:

a) $\cos x = -\frac{1}{3}$ b) $\tan x = 2$

Hướng dẫn giải

a) Đặt: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Ta có:

$$\cos x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\,\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) Đặt: $\tan\beta = 2$. Ta có:

$$\tan x = 2 \Leftrightarrow \tan x = \tan\beta \Leftrightarrow x = \beta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Chú ý: Để giải các phương trình trên, ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi (xem sách giáo khoa)

Khi sử dụng máy tính bỏ túi, ta có:

* $\cos x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\ 109^0 28' + k360^0,\ k \in \mathbb{Z}$

* $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = 63^0 26' + k180^0,\ k \in \mathbb{Z}$

Đề 32: Giải các phương trình:

a) $3\sin x + \sin 2x = 0$ b) $2\cos x + 3\sin 2x = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $3\sin x + \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin x + 2\sin x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\,(3 + 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{3}{2} \text{ (Phương trình vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có: $2\cos x + 3\sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x + 6\sin x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\,(1 + 3\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Trong đó: $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$

Đề 33: Giải các phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan 3x + \tan x = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được 4 cung lượng giác $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$, $\overset{\frown}{AM_4}$ ứng với k = 0; 1.

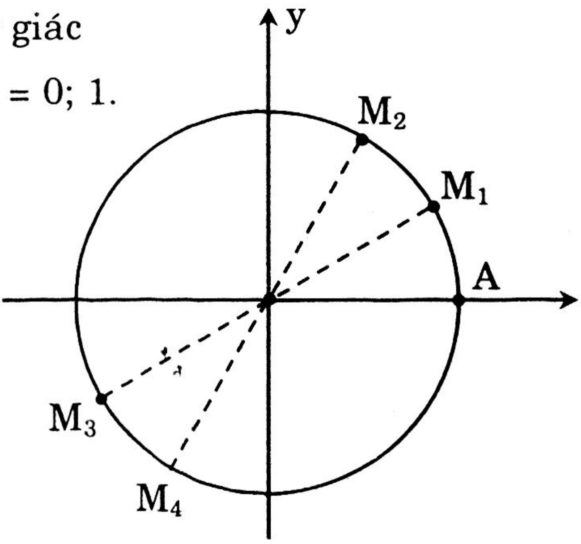
Cụ thể:

$$\overset{\frown}{AM_1} = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\overset{\frown}{AM_2} = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\overset{\frown}{AM_3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\overset{\frown}{AM_4} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



b) Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} 3x \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k_1\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{array}\right. \quad (k_1, k_2, \in \mathbb{Z})$

Với điều kiện đó, ta có:

$\tan 3x + \tan x = 0$

$\Leftrightarrow \tan 3x = -\tan x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan(-x)$

$\Leftrightarrow 3x = -x + k\pi$

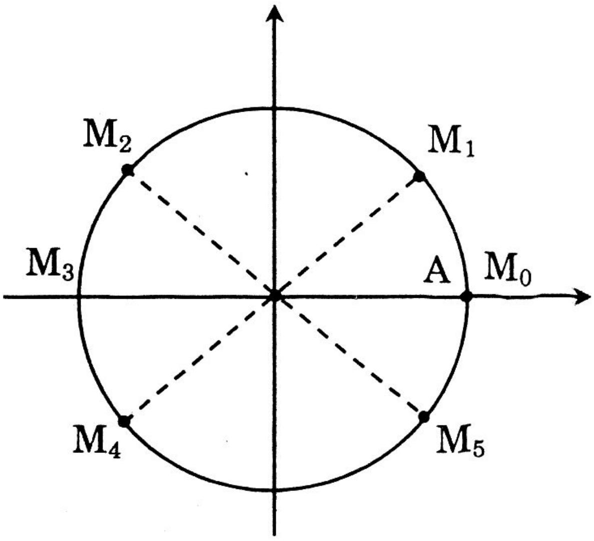
$\Leftrightarrow 4x = k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$

So với điều kiện ta được nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác ta được 6 cung lượng giác $\overset{\frown}{AM_0}$, $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$, $\overset{\frown}{AM_4}$, $\overset{\frown}{AM_5}$ ứng với k = 0; 1



Cụ thể:

$\overset{\frown}{AM_0} = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\overset{\frown}{AM_1} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\overset{\frown}{AM_2} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\overset{\frown}{AM_3} = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\overset{\frown}{AM_4} = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\overset{\frown}{AM_5} = \dfrac{7\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Đề 34: Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$ và $y = \tan 2x$ bằng nhau?

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x \neq \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} - k_1\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k_2\pi}{2} \end{cases}$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$

Khi đó giá trị của các hàm số $y = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$ và $y = \tan 2x$ bằng nhau khi và chỉ khi:

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 35: Tìm nghiệm $x \in [\frac{\pi}{2}; 5\pi]$ của phương trình:

$$\sin 2x = 1$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Theo giả thiết nghiệm $x \in [\frac{\pi}{2}; 5\pi]$ nên:

$$\frac{\pi}{2} \le x \le 5\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le 5\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le k\pi \le \frac{19\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le k \le \frac{19}{4}$$

$\Leftrightarrow$ k = 1; 2; 3; 4 (vì $k \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{17\pi}{4}\right\}$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 36: Giải các phương trình:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

c) $\tan x = 1$

d) $\tan x = -1$

e) $\cot 4x = \sqrt{3}$

f) $\cot(2x - 30^0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Đáp số: a) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

f) $x = -15^0 + k90^0, k \in \mathbb{Z}$

Đề 37: Giải các phương trình:

a) $\tan(x - 15^0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$

c) $\cos 2x \,.\, \tan x = 0$ d) $\sin 3x \,.\, \cot x = 0$

Đáp số: a) $x = 45^0 + k180^0$ b) $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; $x = k\pi$ d) $x = \frac{k\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Đề 38: Giải các phương trình:

a) $\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = \cos^2(3x + \frac{\pi}{2})$ b) $\sin(x + 60^0).\cos x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$; $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

b) Phương trình vô nghiệm

Hướng dẫn: Dùng công thức biến đổi tích thành tổng

Đề 39: Giải các phương trình lượng giác

a) $2\sin 4x + 5\cos 2x = 0$ b) $3\cos x = 2\sin 2x$

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \alpha + k2\pi$; $x = \pi - \alpha + k2\pi$

Với $\sin\alpha = \frac{3}{4}$

Đề 40: Tìm tập nghiệm $x \in (\frac{\pi}{2}; 3\pi)$ của phương trình:

$$\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) - 3\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = 1 + 2\sin x$$

Đáp số: $\left\{\pi; 2\pi; \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$

Hướng dẫn: * $\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) = \sin(2x + 2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos 2x$

* $\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = \cos(x - 4\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

1. *Định nghĩa*

Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là các phương trình có dạng:

* $a\sin^2x + b\sin x + c = 0$ (1)

* $a\cos^2x + b\cos x + c = 0$ (2)

* $a\tan^2x + b\tan x + c = 0$ (3)

* $a\cot^2x + b\cot x + c = 0$ (4)

trong đó $a \neq 0$

Chú ý: Tương tự như trên ta có thể định nghĩa phương trình bậc ba đối với một hàm số lượng giác.

2. *Cách giải*

* giải (1): Đặt $t = \sin x$, điều kiện $t \in [-1; 1]$

* giải (2): Đặt $t = \cos x$, điều kiện $t \in [-1; 1]$

* giải (3): Với điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \tan x$

+ giải (4): Với điều kiện $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \cot x$

Chú ý: Các dạng đặc biệt sau:

a) $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$

* Đổi $\cos 2x = 2\cos^2x - 1$

b) acos2x + bsinx + c = 0

* Đổi $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

c) acos3x + bcos2x + ccosx + d = 0

* Đổi $\begin{cases} \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$

d) asin3x + bcos2x + csinx + d = 0

* Đổi $\begin{cases} \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$

II. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

1. ***Định nghĩa:*** Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx là phương trình có dạng:

$$a\sin x + b\cos x = c \quad (*)$$

Chú ý: Trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$; $b \neq 0$

* Trường hợp $a = 0$; $b \neq 0$ hoặc $a \neq 0$, $b = 0$ thì phương trình (*) có thể đưa ngay về phương trình lượng giác cơ bản.

* Trường hợp $c = 0$:

$$(*) \Leftrightarrow a\sin x + b\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -\frac{a}{b}$$

* Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là:

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

2. ***Cách giải***

a) Cách 1: Chia hai vế của phương trình (*) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi.\sin x + \sin\varphi.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(\text{với } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đây là phương trình lượng giác cơ bản

b) Cách 2: Phương pháp đặt ẩn phụ $t = \tan\frac{x}{2}$. Ta xét hai trường hợp:

* Với $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Thế trực tiếp vào (*) để xem có là nghiệm không

* Với $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$. Khi đó:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

và: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2at}{1+t^2} + \dfrac{b(1-t^2)}{1+t^2} = c$

$\Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0$

Giải phương trình này ta được t và từ đó ta tính được x.

B/ BÀI TOÁN

Đề 41: Giải các phương trình

a) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$ b) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$ (1)

Đặt: $t = \cos x$, điều kiện $-1 \leq t \leq 1$

(1) $\Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 3 & \text{(loại)} \\ t = -\frac{1}{2} & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Với $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \neq \mathbb{Z}$

b) $\tan^2x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$ (2)

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \tan x$, ta có:

$(2) \Leftrightarrow t^2 + (1 - \sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \\ \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 42: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3}\tan x - 6\cot x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$

b) $2\sin^2x - 5\sin x.\cos x - \cos^2x = -2$

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{3}\tan x - 6\cot x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Đặt $t = \tan x$. Ta có:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\tan x - \frac{6}{\tan x} + 2\sqrt{3} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}t - \frac{6}{t} + 2\sqrt{3} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}t^2 + (2\sqrt{3} - 3)t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

* Với $t = -2 \Leftrightarrow \tan x = -2 \Leftrightarrow \tan x = \tan\varphi$ (với $\tan\varphi = -2$)

$\Leftrightarrow x = \varphi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

* Với $t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Cả hai nghiệm này đều thỏa điều kiện của phương trình.

b) $2\sin^2x - 5\sin x.\cos x - \cos^2x = -2$ (2)

* Với $\cos x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thay trực tiếp vào phương trình (2) ta được:

$$2 - 5.0 - 0 = -2 \text{ (sai)}$$

Vậy $\cos x = 0$ không thỏa phương trình (2)

* Với $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của phương trình (2) cho $\cos^2x$ ta được:

$$2\tan^2x - 5\tan x - 1 = -\frac{2}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2x - 5\tan x - 1 = -2(1 + \tan^2x)$$

$$\Leftrightarrow 4\tan^2x - 5\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $\tan x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \tan x = \tan\varphi$ (với $\tan\varphi = \frac{1}{4}$)

$$\Leftrightarrow x = \varphi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Các nghiệm này thỏa điều kiện $\cos x \neq 0$

Đề 43: Giải phương trình:

$$3\sin^2x - 4\sin x.\cos x + \cos^2x = 0$$

Hướng dẫn giải

$$3\sin^2x - 4\sin x.\cos x + \cos^2x = 0 \quad (1)$$

* Với $\cos x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (1), ta được

$$3 - 4.0 + 0 = 0 \text{ (sai)}$$

Vậy $\cos x = 0$ không thỏa phương trình (1)

* Với $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2x$, ta được:

$$3\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \varphi + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}, \text{ và } \tan\varphi = \frac{1}{3})$$

Đề 44: Giải các phương trình:

a) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$ b) $30\cos^2 3x - 29\sin 3x - 23 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2\frac{x}{2}) - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 1 \\ \cos\frac{x}{2} = -3 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = k2\pi \Leftrightarrow x = k4\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có: $30\cos^2 3x - 29\sin 3x - 23 = 0$

$$\Leftrightarrow 30(1 - \sin^2 3x) - 29\sin 3x - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow 30\sin^2 3x + 29\sin 3x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = \frac{1}{5} \\ \sin 3x = -\frac{7}{6} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{5} \qquad \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\varphi \text{ (với } \sin\varphi = \frac{1}{5})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \varphi + k2\pi \\ 3x = \pi - \varphi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\varphi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 45: Giải phương trình:

$$2\sin^2x + (1 - \sqrt{3})\sin x.\cos x + (1 - \sqrt{3})\cos^2x = 1$$

Hướng dẫn giải

$$2\sin^2x + (1 - \sqrt{3})\sin x.\cos x + (1 - \sqrt{3})\cos^2x = 1 \ (1)$$

* Với cosx = 0 hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$2 + (1 - \sqrt{3}).0 + (1 - \sqrt{3}).0 = 1 \text{ (sai)}$$

Vậy cosx = 0 không thỏa phương trình (1)

* Với cosx ≠ 0 hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2x$, ta được:

$$2\tan^2x + (1 - \sqrt{3})\tan x + (1 - \sqrt{3}) = \frac{1}{\cos^2x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2x + (1 - \sqrt{3})\tan x + (1 - \sqrt{3}) = 1 + \tan^2x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Các nghiệm này thỏa điều kiện cosx ≠ 0

Đề 46: Giải phương trình:

$$2\cos^2x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2x = -4$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2\cos^2x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2x = -4$

$$\Leftrightarrow \cos^2x - 3\sqrt{3}\sin x.\cos x - 2\sin^2x = -2 \ (1)$$

* Với cosx = 0 hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, thay trực tiếp vào phương trình (1) ta được:

$$0 - 3\sqrt{3}.0 - 2 = -2 \text{ (đúng)}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho

* Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta được

$$1 - 3\sqrt{3}\tan x - 2\tan^2 x = -\frac{2}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{3}\tan x - 2\tan^2 x = -2(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3}\tan x = -3 \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Tóm lại phương trình đã cho có nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Chú ý: Với phương trình trên ta có thể xét hai trường hợp

$\sin x = 0$ và $\sin x \neq 0$

Đề 47: Giải các phương trình

a) $\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ b) $2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{-5}{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có: $2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + \sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin^2 x + \sin x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{5}{4} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Đề 48: Giải phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x) - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Đề 49: Giải phương trình:

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}$$

Hướng dẫn giải

Phương trình có dạng $a\sin x + b\cos x = c$

với $a = 3$; $b = \sqrt{3}$. Do đó $\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3}$

Chia hai vế của phương trình cho $2\sqrt{3}$, ta được:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{6}\sin x + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x = \sin(-\dfrac{\pi}{6})$

$\Leftrightarrow \sin(x + \dfrac{\pi}{6}) = \sin(-\dfrac{\pi}{6})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

Đề 50: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{5}\sin x + 2\cos x = 4$ b) $\sin x + (\sqrt{3} - 2)\cos x = 1$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình có dạng asinx + bcosx = c

$$\text{Với } \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 + 4 = 9 \\ c^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad a^2 + b^2 < c^2$$

Vậy phương trình vô nghiệm

Nhắc lại: Điều kiện có nghiệm của phương trình là: $a^2 + b^2 \geq c^2$

b) $\sin x + (\sqrt{3} - 2)\cos x = 1$ (1)

Ta xét hai trường hợp:

* *Trường hợp 1*: $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $x = \pi + k2\pi$. Thay vào (1) ta được:

$$0 + (\sqrt{3} - 2)(-1) = 1 \text{ (sai)}$$

Vậy $x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình (1)

* *Trường hợp 2*: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $x \neq \pi + k2\pi$

Đặt $t = \tan\frac{\pi}{2}$ khi đó: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2} + (\sqrt{3} - 2)\frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t + (\sqrt{3} - 2)(1 - t^2) = 1 + t^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)t^2 - 2t + 3 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}\dfrac{x}{2} = 1 \\ \text{tg}\dfrac{x}{2} = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Nếu giải bài toán trên bằng cách chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta sẽ gặp nhiều phức tạp.

Đề 51: Giải phương trình:

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$$

Hướng dẫn giải

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2$ ta được:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 52: Giải phương trình:

$$\sin 7x + \sqrt{3}\cos 7x = \sqrt{2}$$

Hướng dẫn giải

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2$, ta được:

$$\frac{1}{2}\sin 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin 7x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 7x = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin(7x + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 7x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ 7x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 53: Giải các phương trình:

a) $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x - \sin x = \sqrt{3}\cos x$

b) $2\cos 2x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x - \sin x = \sqrt{3}\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 7x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 7x = \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos(7x + \frac{\pi}{3}) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 7x + \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 8x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) $2\cos 2x = \cos x + \sqrt{3}\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos(x - \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 54: Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 5x + \cos 5x + \sqrt{3}\cos 2x = \sin 2x$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt{3}\sin5x + \cos5x + \sqrt{3}\cos2x = \sin2x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin5x + \cos5x = \sin2x - \sqrt{3}\cos2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin5x + \frac{1}{2}\cos5x = \frac{1}{2}\sin2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin5x + \sin\frac{\pi}{6}\cos5x = \cos\frac{\pi}{3}\sin2x - \sin\frac{\pi}{3}\cos2x$$

$$\Leftrightarrow \sin(5x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x + \frac{\pi}{6} = \pi - 2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 7x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 55: Giải phương trình:

$$8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Khi đó: $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

$$\Leftrightarrow 8\sin x.\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x.\sin2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x - \cos3x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow -2\cos3x = \sqrt{3}\sin x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos3x = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos3x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 56: Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$(2m - 1)\cos x + m\sin x = 3m - 1$$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho có dạng: $a\cos x + b\sin x = c$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 + m^2 \geq (3m - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 + m^2 \geq 9m^2 - 6m + 1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

Đề 57: Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{3}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = m$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt{3}\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x = m$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,.\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x = m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 2m - \sqrt{3}\,.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 \geq (2m - \sqrt{3}\,)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \geq (2m - \sqrt{3}\,)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 \le 2m - \sqrt{3} \le 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 \le 2m \le \sqrt{3} + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} - 2}{2} \le m \le \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

Đề 58: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{\cos x - 2\sin x}{2 - \sin x}$$

Hướng dẫn giải

Vì $2 - \sin x \neq 0 \ \forall x$, nên hàm số đã cho có:

Tập xác định: $D = R$

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phải tồn tại $x \in R$ sao cho: $\frac{\cos x - 2\sin x}{2 - \sin x} = y_0$

hay phương trình:

$$\cos x + (y_0 - 2)\sin x = 2y_0$$

phải có nghiệm, tức là ta phải có:

$$1^2 + (y_0 - 2)^2 \ge (2y_0)^2$$

$$\Leftrightarrow 3y_0^2 + 4y_0 - 5 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{19}}{3} \le y_0 \le \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của y là: $\frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$

và giá trị nhỏ nhất của y là: $\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$

Đề 59: Tìm x sao cho $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x + 2}$ là số nguyên

Hướng dẫn giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phải tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $\frac{\sin x + 1}{\cos x + 2} = y_0$

hay phương trình

$$\sin x - y_0\cos x = 2y_0 - 1$$

phải có nghiệm, tức là ta phải có:

$$1^2 + y_0^2 \geq (2y_0 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y_0^2 - 4y_0 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq y_0 \leq \frac{4}{3}$$

Trên đoạn $\left[0, \frac{4}{3}\right]$, y_0 có hai giá trị nguyên là:

$y_0 = 0$ hoặc $y_0 = 1$

* Với $y_0 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x + 1}{\cos x + 2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

* Với $y_0 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x + 1}{\cos x + 2} = 1 \Leftrightarrow \sin x + 1 = \cos x + 2$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Tóm lại các giá trị x cần tìm là:

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ hay } \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đề 60: Giải phương trình: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \quad (*) \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases}$

Quy đồng mẫu số chung:

$$\sin 4x = 2\sin 2x.\cos 2x = 4\sin x.\cos x.\cos 2x$$

ta được: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos 2x + 2\cos 2x = 2$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos 2x + 2(1 - 2\sin^2 x) = 2$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin x = 0 \\ \sin x = 0 \text{ (loại, không thỏa điều kiện } (*)) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \text{ (loại, vì khi đó } \cos x = 0) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Đề 61: Giải phương trình:

$$\frac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 1 \qquad (*)$

Khi đó: $\frac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\sin x\cos x + 3\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x = \sin 2x - 1$

$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sin 2x + 3.\frac{1 - \cos 2x}{2} + 3\sqrt{2}\sin x = \sin 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos 2x + 2\sin 2x + 3 - 3\cos 2x + 6\sqrt{2}\sin x = 2\sin 2x - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2(1 - 2\sin^2 x) + 6\sqrt{2}\sin x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2(2 + 2\sin^2 x) + 6\sqrt{2}\sin x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\sqrt{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \text{ (loại, vì không thỏa mãn điều kiện (*))} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đề 62: Giải phương trình: $|\cos 3x| = 1 - \sqrt{3}\sin 3x$

Hướng dẫn giải

Ta có: $|\cos 3x| = 1 - \sqrt{3}\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{3}\sin 3x \geq 0 \\ \cos^2 3x = (1 - \sqrt{3}\sin 3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 4\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 3x = 0 \text{ hoặc } \sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \quad 3x = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đề 63: Giải phương trình:

$$|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = 2$$

Hướng dẫn giải

Bình phương hai vế phương trình đã cho, ta được:

$$|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = 2$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 + 2|\sin x - \cos x|.|\sin x + \cos x| = 4$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2|\sin^2 x - \cos^2 x| = 4$$

$$\Leftrightarrow |\cos 2x| = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Đề 64: Giải phương trình: $\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 2} = 2\sin x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 \geq 0 \\ \sin^2 x - 2\sin x + 2 = (2\sin x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq \dfrac{1}{2} \\ \sin^2 x - 2\sin x + 2 = 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 1 \text{ hoặc } \sin x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Đề 65: Giải phương trình: $\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2}\cos x$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2}\cos x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4\cos 2x = 2\cos x \\ 2\cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4(2\cos^2 x - 1) = 2\cos x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{4} \text{ hoặc } \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 66: Giải các phương trình

a) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$ b) $\cos^2 x - 3\sin x = 1$

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Đề 67: Giải các phương trình

a) $3\sin^2 2x - 4\sin 2x.\cos 2x + 5\cos^2 2x = 2$

b) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ x = \frac{\varphi}{2} + \frac{k\pi}{2}$ với $\tan\varphi = 3$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \varphi + k\pi$ với $\tan\varphi = -5$.

Đề 68: Giải các phương trình

a) $\sin 9x - \cos 6x = \sin 3x$ b) $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$

c) $\sin 3x.\sin 2x = \cos 5x.\sin 4x$ d) $\sin 6x.\sin 2x = \sin 13x.\sin 9x$

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3};\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3};\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$

b) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5};\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

c) $x = \frac{k\pi}{2};\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$

d) $x = \frac{k\pi}{7};\ x = \frac{k\pi}{15}$

Đề 69: Giải các phương trình

a) $\frac{\tan 2x}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan 2x} = \frac{5}{2}$ b) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$

Đáp số: a) Vô nghiệm b) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Đề 70: Tìm các nghiệm thuộc đoạn $[0, \pi]$ của phương trình

$$4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$$

Đáp số: $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

Đề 71: Giải các phương trình

a) $\cos 5x + \sin 5x + \sin 2x = \cos 2x$

b) $\sqrt{3}\sin 5x + \cos 5x = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$; $x = \frac{k2\pi}{7}$

b) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{7}$

Đề 72: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 2}$ b) $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$

Đáp số: a) GTNN $\frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$; GTLN $\frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$

b) GTNN -2; GTLN 1

Đề 73: Giải phương trình

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}.\sin 2x = (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1$$

Đáp số: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Đề 74: Giải các phương trình

a) $\sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 2x = 0$ b) $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = 4$

Đáp số: a) Hướng dẫn: đặt $t = \sin x + \cos x$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Khi đó: $\sin 2x = t^2 - 1$

ĐS: $x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$; $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

b) Hướng dẫn: đặt $t = \cos x - \sin x$; $t \in [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$

Khi đó: $\sin 2x = 1 - t^2$

ĐS: $x = k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Đề 75: Giải phương trình

$$3|\cos x + \sin x| + 2\sin x.\cos x = 3$$

Đáp số: Hướng dẫn: Đặt $t = |\cos x + \sin x|$; $t \in [0; \sqrt{2}]$

Khi đó: $2\sin x . \cos x = t^2 - 1$

ĐS: $x = \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

TOÁN TRẮC NGHIỆM

Đề 76:

1. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin 3x}{\cos x + 2}$ là:

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} / k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x + \sin x}{\sin x - 2}$ là:

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in z\right\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ là:

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\cot x \, . \cos 2x - 1}{\cos x}$ là:

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2} \; / \; k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \; / \; k \in \mathbb{Z}\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \; / \; k \in \mathbb{Z}\right\}$

5. Tập xác định của hàm số $y = \cot\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + 1}$ là:

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \; / \; k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \; / \; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{8} + k\pi \; / \; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Đề 77:

1. Cho hai hàm số: $f(x) = \sin x$

$g(x) = \cos x.$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. f(x) là hàm số chẵn, g(x) là hàm số lẻ.

B. f(x) là hàm số lẻ, g(x) là hàm số chẵn.

C. f(x) và g(x) là các hàm số lẻ.

D. f(x) và g(x) là các hàm số chẵn.

2. Cho hai hàm số: $f(x) = \cos 3x . \sin 2x$

$$g(x) = \frac{\tan x}{1 + \cos^2 x}$$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. f(x) là hàm số chẵn, g(x) là hàm số lẻ

B. f(x) là hàm số lẻ, g(x) là hàm số chẵn

C. f(x) và g(x) là các hàm số lẻ

D. f(x) và g(x) là các hàm số chẵn

3. Cho hàm số $f(x) = |\cos x|$. Xét các mệnh đề:

(I) f(x) có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

(II) f(x) là hàm số lẻ

(III) f(x) tăng trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$

Câu nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng B. Chỉ (I) và (II) đúng

C. Chỉ (I) và (III) đúng D. Cả (I), (II), (III) đều đúng

4. Cho hàm số $y = |\sin x|$. Xét các mệnh đề:

(I) Hàm số tăng trên khoảng $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$

(II) Hàm số giảm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

(II) Hàm số tăng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Câu nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng.
B. Chỉ (I) và (II) đúng
C. Chỉ (II) và (III) đúng
D. Cả (I), (II), (III) đều sai

5. Cho hàm số: $f(x) = \frac{1}{4}\sin x.\cos x$. Xét các mệnh đề

(I) f(x) là hàm số lẻ.

(II) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{1}{8}$

(III) Giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{1}{8}$

Câu nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng.
B. Chỉ (I) và (II) đúng.
C. Chỉ (II) và (III) đúng.
D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Đề 78:

1. Xét các mệnh đề:

(I) Phương trình $\cos x = 1{,}2$ vô nghiệm.

(II) Phương trình $\sin x = -\sqrt{3}$ vô nghiệm.

(III) Phương trình $\sin x + \cos x = 2$ vô nghiệm.

Câu nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng
B. Chỉ (I) và (II) đúng
C. Chỉ (II) và (III) đúng
D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

2. Tập nghiệm của phương trình: $\cos 2x = -1$ là:

A. $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$
B. $\{\pi + k2\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$
C. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$
D. $\{\pi + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$

3. Điều kiện có nghiệm của phương trình $a\sin 5x + b\cos 5x = c$ là:

A. $a^2 + b^2 \le c^2$ B. $a^2 + b^2 < c^2$

C. $a^2 + b^2 \ge c^2$ D. $a^2 + b^2 > c^2$.

4. Tìm m để phương trình: $\sin 2x + \cos^2 x = \frac{m}{2}$ có nghiệm.

Đáp số là:

A. $1 - \sqrt{5} \le m \le 1 + \sqrt{5}$ B. $1 - \sqrt{3} \le m \le 1 + \sqrt{3}$

C. $1 - \sqrt{2} \le m \le 1 + \sqrt{2}$ D. $0 \le m \le 2$.

5. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. π D. $\frac{\pi}{12}$

Đề 79:

1. Tập nghiệm của phương trình: $\cos^2 x - \sin x.\cos x = 0$ là:

A. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D. $\left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Với giá trị nào của m thì phương trình sau vô nghiệm:

$2\sin^2 x + m\sin 2x = 2m$.

Chọn phương án đúng trong các phương án sau:

A. $0 < m < \frac{4}{3}$ B. $0 \le m \le \frac{4}{3}$

C. $m \le 0$ hoặc $m \ge \frac{4}{3}$ D. $m < 0$ hoặc $m \ge \frac{4}{3}$

3. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình:

$2\sin x + \sqrt{2}\sin 2x = 0$ là:

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. π

4. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$\tan 5x.\tan x = 1$ là:

A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{4}$ C. $-\frac{\pi}{6}$ D. $-\frac{\pi}{12}$

5. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ theo thứ tự là:

A. 1 và – 2 B. 2 và –1 C. 3 và 0 D. 1 và $\frac{2}{11}$

Đề 80:

1. Cho phương trình: $\sin 4x + \cos 5x = 0$.

Nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình theo thứ tự là:

A. $-\frac{\pi}{18}$ và $\frac{2\pi}{9}$ B. $-\frac{\pi}{18}$ và $\frac{\pi}{2}$

C. $-\frac{\pi}{18}$ và $\frac{\pi}{6}$ D. $-\frac{\pi}{18}$ và $\frac{\pi}{3}$

2. Tập nghiệm của phương trình: $2.\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ là:

A. $\{k2\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\left\{k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$

D. $\left\{k\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$

3. Tập nghiệm của phương trình:

$\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ là:

A. $\left\{\pm\frac{\pi}{2} + k2\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$ B. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$

C. $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$ D. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k\pi / k\in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Nghiệm dương lớn nhất của phương trình:

$4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} \text{ theo thứ tự là:}$$

A. 1 và $\frac{2}{11}$ B. 1 và $\frac{1}{11}$ C. 2 và $\frac{2}{11}$ D. 2 và $-\frac{2}{11}$

ĐÁP ÁN

Đề 76:

1. A 2. C 3. D 4. B 5. B

Đề 77:

1. B 2. C 3. C 4. B 5. D

Đề 78:

1. D 2. C 3. C 4. A 5. A

Đề 79:

1. C 2. B 3. B 4. D 5. A

Đề 80:

1. C 2. C 3. B 4. A 5. C.

Chương 2. TỔ HỢP, XÁC SUẤT

- Quy tắc đếm
- Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp
- Xác suất điều kiện
- Biến ngẫu nhiên rời rạc
- Kì vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên

§1. QUY TẮC ĐẾM

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Quy tắc cộng

1. Bài toán mở đầu:

Trong hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Giải: Có 6 cách chọn quả cầu trắng và 4 cách chọn quả cầu đen.

Vậy có: $6 + 4 = 10$ cách chọn một trong các quả cầu ấy.

Từ bài toán trên ta đi đến qui tắc cộng cho hai đối tượng như sau:

2. Quy tắc cộng

- Nếu có m cách chọn đối tượng x, n cách chọn đối tượng y, và nếu cách chọn đối tượng x không trùng với bất kì cách chọn đối tượng y nào, thì có $m + n$ cách chọn một trong các đối tượng đã cho.

Quy tắc trên có thể mở rộng cho nhiều đối tượng x, y, z, t...

Chú ý: Nếu kí hiệu N(A) là số phần tử của tập hợp hữu hạn A thì quy tắc cộng có thể phát biểu như sau:

- Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

Nhận xét:

a) Nếu A, B là tập hợp hữu hạn bất kì thì

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

b) Nếu X là tập hữu hạn tùy ý và A là tập con của X thì

$$N(X \setminus A) = N(X) - N(A).$$

c) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập hữu hạn, đôi một không giao nhau thì

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_m).$$

II. Quy tắc nhân

* Giả sử ta phải thực hiện hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m kết quả và ứng với mỗi kết quả đó, hành động thứ hai có n kết quả, thì có m × n kết quả của hai hành động liên tiếp ấy.

Quy tắc trên có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 81: Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$

a) Tính $N(A)$, $N(B)$, $N(A \cup B)$, $N(A \cap B)$.

b) Kiểm chứng công thức

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Hướng dẫn giải

a) $A = \{a, b, c\} \Rightarrow N(A) = 3$

$B = \{b, c, d, e\} \Rightarrow N(B) = 4$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow N(A \cup B) = 5$

$A \cap B = \{b, c\} \Rightarrow N(A \cap B) = 2$

b) Ta có: $N(A \cup B) = 5$

$N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 3 + 4 - 2 = 5$

Vậy: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Đề 82. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

a) Tính $N(X)$, $N(A)$, $N(X \setminus A)$.

b) Kiểm chứng công thức

$$N(X \setminus A) = N(X) - N(A)$$

Hướng dẫn giải

a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow N(X) = 7$

$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow N(A) = 3$

$X \setminus A = \{4, 5, 6\} \Rightarrow N(X \setminus A) = 4$

b) Ta có: $N(X \setminus A) = 4$

$N(X) - N(A) = 7 - 3 = 4$

Vậy $N(X \setminus A) = N(X) - N(A)$.

Đề 83: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$

a) Tính $N(A)$, $N(B)$, $N(A \cup B)$, $N(A \cap B)$.

b) Kiểm chứng công thức

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

Cho biết điều kiện để có công thức này?

a) $A = \{a, b, c\} \Rightarrow N(A) = 3$

$B = \{d, e, f, g\} \Rightarrow N(B) = 4$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\} \Rightarrow N(A \cup B) = 7$

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow N(A \cap B) = 0$

b) Ta có: $N(A \cup B) = 7$

$N(A) + N(B) = 3 + 4 = 7$

Vậy $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$.

* Điều kiện để có công thức trên:

A, B là hai tập hữu hạn và $A \cap B = \varnothing$.

Đề 84: Trong hộp có 5 quả cầu trắng và 7 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Cách 1: Có 5 cách chọn quả cầu trắng

Có 7 cách chọn quả cầu đen.

Theo quy tắc cộng có: $5 + 7 = 12$ cách chọn một trong các quả cầu ấy.

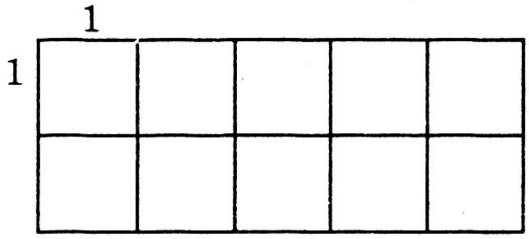
Cách 2: Kí hiệu A, B, X lần lượt là tập hợp các quả cầu trắng, tập hợp các quả cầu đen và tập hợp các quả cầu trong hộp.

Rõ ràng $X = A \cup B$ và $A \cap B = \varnothing$ nên:

$$N(X) = N(A \cup B) = N(A) + N(B) = 5 + 7 = 12$$

Vậy có 12 cách chọn một trong các quả cầu ấy.

Đề 85: Hãy đếm số hình vuông trong hình sau:



Hướng dẫn giải

Cách 1: Rõ ràng số hình vuông trong hình có hai loại:

Loại có cạnh 1 đơn vị và loại có cạnh 2 đơn vị. Gọi A, B lần lượt là tập hợp các hình vuông kể trên.

Ta có: $N(A) = 10; N(B) = 4$

Nhưng $A \cap B = \varnothing$ nên số hình vuông cần tìm là:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) = 10 + 4 = 14.$

Cách 2: Có 10 hình vuông cạnh 1 đơn vị

có 4 hình vuông cạnh 2 đơn vị

Vậy theo quy tắc cộng có $10 + 4 = 14$ hình vuông thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 86: Một lớp 50 học sinh dự trại hè được chơi hai môn thể thao: Cầu lông và bóng bàn. Có 30 bạn đăng kí chơi cầu lông, 28 bạn đăng kí chơi bóng bàn và 10 bạn không đăng kí chơi môn nào? Hỏi có bao nhiêu bạn:

a) Đăng kí chơi cả hai môn?

b) Chỉ đăng kí chơi một môn?

Hướng dẫn giải

Kí hiệu X là tập hợp các học sinh trong lớp. A, B lần lượt là tập hợp các học sinh đăng kí chơi cầu lông và chơi bóng bàn. Như vậy tập hợp học sinh đăng kí chơi cả hai môn là $A \cap B$. Tập hợp học sinh đăng kí chơi ít nhất một môn là $A \cup B$.

Rõ ràng $N(A \cup B) = 50 - 10$
$= 40$

a) Ta có:
$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$
$$\Rightarrow N(A \cap B) = N(A) + N(B) - N(A \cup B) = 30 + 28 - 40 = 18$$

Vậy có 18 học sinh đăng kí chơi cả hai môn.

b) Số học sinh chỉ đăng kí chơi một môn là:

$N(A \cup B) - N(A \cap B) = 40 - 18 = 22$

Đề 87: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

a) Một chữ số?

b) Hai chữ số

c) Ba chữ số khác nhau?

d) Có không quá ba chữ số?

Hướng dẫn giải

a) Có 4 số gồm một chữ số là: 1; 2; 3; 4.

b) Kí hiệu số có hai chữ số là $\overline{ab}$

Có 4 cách chọn a.

Có 4 cách chọn b.

Vậy theo quy tắc nhân có: 4 × 4 = 16 số thỏa yêu cầu bài toán.

c) Kí hiệu số cần tìm là $\overline{abc}$.

Có 4 cách chọn a.

3 cách chọn b.

2 cách chọn c.

Theo quy tắc nhân có: 4 × 3 × 2 = 24 số thỏa yêu cầu bài toán.

d) Có 3 loại số thỏa yêu cầu bài toán:

* Loại 1: Số có một chữ số, có 4 số.

* Loại 2: Số có hai chữ số. Kí hiệu $\overline{ab}$.

Có 4 cách chọn a.

4 cách chọn b.

Theo quy tắc nhân loại này có: 4 × 4 = 16 số.

* Loại 3: Số có 3 chữ số. Kí hiệu $\overline{abc}$.

Có 4 cách chọn a

4 cách chọn b

4 cách chọn c

Theo quy tắc nhân loại này có 4 × 4 × 4 = 64 số.

Theo quy tắc cộng có 4 + 16 + 64 = 84 số thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 88: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn, có ba chữ số khác nhau đôi một? (Chú ý rằng chữ số đầu tiên không được là chữ số 0).

Hướng dẫn giải

Kí hiệu số cần tìm là $\overline{abc}$

Vì $\overline{abc}$ chẵn nên $c \in \{0, 2, 4, 6\}$

* *Trường hợp c = 0*

Có 1 cách chọn c

6 cách chọn a

5 cách chọn b

Trường hợp này, theo quy tắc nhân có: 1 × 6 × 5 = 30 số.

** Trường hợp $c \neq 0$:*

Có 3 cách chọn c

5 cách chọn a

5 cách chọn b

Trường hợp này, theo quy tắc nhân có: 3 × 5 × 5 = 75 số.

Như vậy, theo quy tắc cộng có: 30 + 75 = 105 số thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 89: Có bao nhiêu số tự nhiên $\overline{n}$ có 4 chữ số khác nhau đôi một, biết:

a) $\overline{n}$ chia hết cho 5 b) $\overline{n}$ lẻ

Hướng dẫn giải

Có 10 chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kí hiệu số cần tìm $\overline{n} = \overline{abcd}$.

a) $\overline{n}$ chia hết cho 5 nên $d \in \{0; 5\}$.

** Trường hợp $d = 0$:*

Có 1 cách chọn d.

9 cách chọn a.

8 cách chọn b.

7 cách chọn c.

Trường hợp này, theo quy tắc nhân có: 1 × 9 × 8 × 7 = 504 số.

** Trường hợp $d = 5$*

Có 1 cách chọn d

8 cách chọn a

8 cách chọn b

7 cách chọn c

Trường hợp này theo quy tắc nhân có: 1 × 8 × 8 × 7 = 448 số.

Như vậy theo quy tắc cộng có: 504 + 448 = 952 số thỏa yêu cầu bài toán.

b) $\overline{n}$ lẻ nên $d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Có 5 cách chọn d

8 cách chọn a

8 cách chọn b

7 cách chọn c

Theo quy tắc nhân có: 5 × 8 × 8 × 7 = 2.240 số thỏa yêu cầu bài toán

Đề 90: Từ các chữ số 1, 3, 4, 7 người ta lập số tự nhiên $\overline{n}$. Hỏi có bao nhiêu số $\overline{n}$ nếu:

a) $\overline{n} \in (100; 400)$ b) $\overline{n} \in (150; 400)$

Hướng dẫn giải

Kí hiệu số cần tìm là $\overline{n} = \overline{abc}$

a) Vì $\overline{n} \in (100; 400)$ nên:

Có 2 cách chọn a ($a \in \{1, 3\}$)
4 cách chọn b
4 cách chọn c

Theo quy tắc nhân có: 2 × 4 × 4 = 32 số thỏa yêu cầu bài toán.

b) Vì $\overline{n} \in (150; 400)$ nên có hai trường hợp:

* a = 1: Có 1 cách chọn a
1 cách chọn b (b = 7)
4 cách chọn c

Trường hợp này, theo quy tắc nhân có: 1 × 1 × 4 = 4 số.

* a = 3: Có 1 cách chọn a
4 cách chọn b
4 cách chọn c

Trường hợp này, theo quy tắc nhân có: 1 × 4 × 4 = 16 số.

Như vậy theo quy tắc cộng có: 4 + 16 = 20 số thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 91: Trong một đội văn nghệ có 8 bạn nam và 6 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một đôi song ca nam–nữ?

Hướng dẫn giải

Có 8 cách chọn bạn nam, và ứng với mỗi cách chọn bạn nam có 6 cách chọn bạn nữ.

Vậy theo quy tắc nhân có:

8 × 6 = 48 cách chọn đôi song ca nam – nữ.

Đề 92: Một người vào cửa hàng ăn. Người đó muốn chọn thực đơn gồm một món ăn trong 7 món, một loại hoa quả tráng miệng trong 3 loại hoa quả và một loại nước uống trong 4 loại nước uống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thực đơn của bữa ăn?

Hướng dẫn giải

Có 7 cách chọn món ăn

3 cách chọn loại hoa quả

và 4 cách chọn nước uống

Theo quy tắc nhân có: $7 \times 3 \times 4 = 84$ cách chọn thực đơn của bữa ăn.

Đề 93: Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tính số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc để phát biểu ý kiến sao cho:

a) Hai người đó là vợ chồng

b) Hai người đó không là vợ chồng

Hướng dẫn giải

a) Có 10 cách chọn người đàn ông.

Ứng với mỗi cách chọn người đàn ông chỉ có một cách chọn người đàn bà (là vợ của người đàn ông đó).

Vậy theo quy tắc nhân có: $10 \times 1 = 10$ cách chọn.

b) Có 10 cách chọn người đàn ông.

Ứng với mỗi cách chọn người đàn ông chỉ có 9 cách chọn người đàn bà (trừ vợ của người đàn ông đã chọn).

Vậy theo quy tắc nhân có: $10 \times 9 = 90$ cách chọn.

Đề 94: Một lớp học có 50 học sinh. Mỗi em đều đăng kí chơi ít nhất một trong hai môn: bóng đá và bóng chuyền. Có 30 em đăng kí chơi bóng đá, 35 em chơi bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em:

a) Đăng kí chơi cả hai môn. b) Chỉ đăng kí chơi bóng đá.

Hướng dẫn giải

a) Gọi X là tập hợp học sinh trong lớp, A và B lần lượt là tập hợp học sinh đăng kí chơi bóng đá và bóng chuyền.

Vì mỗi em trong lớp đều đăng kí ít nhất một trong hai môn nên:

$$A \cup B = X.$$

Do đó: $N(A \cup B) = N(X) = 50$.

Số bạn đăng kí chơi cả hai môn là:

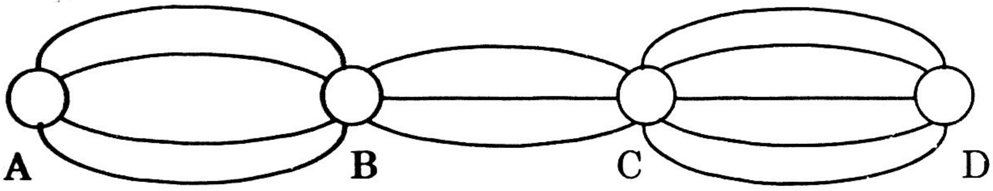
$$N(A \cap B) = N(A) = N(B) - N(A \cup B)$$

$$= 30 + 35 - 50 = 15 \text{ (bạn)}$$

b) Số bạn chỉ đăng kí chơi môn bóng đá là:

$30 - 15 = 15$ (bạn)

Đề 95: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các đường như hình sau:



Hỏi có bao nhiêu con đường:

a) Đi từ A đến D mà chỉ đi qua B và C một lần?

b) Đi theo lộ trình ABCDCBA?

c) Đi theo lộ trình ABCDCBA mà không có đoạn nào đi qua hai lần?

Hướng dẫn giải

a) Có 4 con đường đi từ A đến B

3 con đường đi từ B đến C

5 con đường đi từ C đến D

Theo quy tắc nhân có: $4 \times 3 \times 5 = 60$ con đường thỏa yêu cầu bài toán.

b) Có 4 con đường đi từ A đến B

3 con đường đi từ B đến C

5 con đường đi từ C đến D

5 con đường đi từ D đến C

3 con đường đi từ C đến B

4 con đường đi từ B đến A

Theo quy tắc nhân có:

$4 \times 3 \times 5 \times 5 \times 3 \times 4 = 3600$ con đường thỏa yêu cầu bài toán.

c) Có 4 con đường đi từ A đến B

3 con đường đi từ B đến C

5 con đường đi từ C đến D

4 con đường đi từ D đến C

(Vì không được đi trên con đường đi từ C đến D)

2 con đường đi từ C đến B

3 con đường đi từ B đến A

Theo quy tắc nhân có: $4 \times 3 \times 5 \times 4 \times 2 \times 3 = 1440$ con đường thỏa yêu cầu bài toán.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 96: Có bao nhiêu số tự nhiên $\overline{n}$ có 4 chữ số khác nhau đôi một, biết:

a) $\overline{n}$ chia hết cho 10. b) $\overline{n}$ không chia hết cho 10.

Đáp số: a) 504 số. b) 4.032 số.

Đề 97: Cho tập X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, có bao nhiêu số tự nhiên $\overline{n}$ gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ X (chữ số chia đầu tiên phải khác 0) trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overline{n}$ là số chẵn.

b) Một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Đáp số: a) 3.000 số.

b) 2.280 số.

Đề 98: Nam đến cửa hàng văn phòng phẩm để mua quà tặng bạn. Trong cửa hàng có ba mặt hàng sau: Bút, vở và thước, trong đó có 5 loại bút, 4 loại vở và 3 loại thước. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một món quà gồm một bút, một vở và một thước?

Đáp số: 60 cách.

Đề 99: Một người có 7 áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cà vạt trong đó có hai cà vạt màu vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn áo và cà vạt nếu:

a) Chọn áo nào cũng được và cà vạt nào cũng được.

b) Đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt màu vàng.

Đáp số: a) 35 cách.

b) 29 cách

Đề 100: Trên giá sách có 10 quyển sách tiếng Việt khác nhau, 8 quyển sách tiếng Anh khác nhau và 6 quyển sách tiếng Pháp khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

a) Một quyển sách?

b) Ba quyển sách tiếng khác nhau?

c) Hai quyển sách tiếng khác nhau?

Đáp số: a) 25 cách.

b) 480 cách.

c) 188 cách.

§2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Hoán vị

1. *Định nghĩa:*

Kết quả của sự sắp xếp n phần tử khác nhau theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

2. *Số hoán vị*

Số hoán vị của n phần tử được kí hiệu là P_n và được tính theo công thức:

$$\boxed{P_n = n!}$$

trong đó n! (Đọc là n giai thừa) được định nghĩa như sau:

Với $n \in \mathbb{N}^*$, thì: $n! = 1.\ 2.\ 3 \ldots .\ n$.

II. Chỉnh hợp

1. *Định nghĩa:*

Giả sử A là tập hợp gồm n phần tử và k là số tự nhiên ($1 \le k \le n$).

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau thuộc A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

2. *Số chỉnh hợp chập k của n phần tử*

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là A_n^k và được tính theo công thức:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}} \quad (1 \le k \le n)$$

(ở đây quy ước: 0! = 1).

Chú ý: Từ định nghĩa ta suy ra mỗi hoán vị của n phần tử chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó và ngược lại vì vậy:

$$P_n = A_n^n$$

III. Tổ hợp

1. *Định nghĩa:*

Cho tập hợp A có n $(n \geq 1)$ phần tử và số tự nhiên $k \leq n$.

Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Chú ý: $\varnothing$ là tổ hợp chập 0 duy nhất của n phần tử.

2. *Số tổ hợp chập k của n phần tử*

Số tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu C_n^k và được tính theo công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Chú ý: $* C_n^k = C_n^{n-k};\ 0 \leq k \leq n.$

$* \ C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}\ 0 \leq k \leq n.$

IV. Nhị thức Niu - tơn

1. *Công thức nhị thức* Niu - tơn

$$(a+b)^n C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots. + C_n^n b^n \qquad (1)$$

Chú ý:

a) Số các số hạng của công thức (1) là $n + 1$.

b) Trong biểu thức ở vế phải của (1), số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng luôn bằng n.

c) Số hạng thứ $k + 1$ trong khai triển là:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}.b^k.$$

2. *Tính chất của nhị thức Niu - tơn*

a) Các hệ số ở vế phải của công thức (1) có tính đối xứng.

b) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots. + C_n^n = 2^n.$

c) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots. + (-1)^k C_n^k + \ldots. + (-1)^n C_n^n = 0.$

3. *Tam giác Pa–xcan (Pascal)*

Trong tam giác ta đi từ số 1. Mỗi số trong tam giác bằng số bên trên cộng số bên trái.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & \boxed{6\quad 4} & & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & \boxed{10} & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

....

Nhận xét:

a) 10 = 4 + 6 (Số bên trên cộng số bên trái)

b) Hàng thứ n + 1 trong tam giác Pascal là các hệ số trong khai triển $(a + b)^n$.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 101: Có bao nhiêu cách xếp 6 chỗ ngồi cho 6 học sinh vào 6 ghế xếp thành một dãy?

Hướng dẫn giải

Mỗi hoán vị của 6 học sinh là một cách xếp.

Vậy có: $P_6 = 6! = 720$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 102: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau đôi một?

Hướng dẫn giải

Kí hiệu số cần tìm là $\overline{n} = \overline{abcd}$.

Mỗi hoán vị của 4 chữ số 1, 2, 3, 4 cho ta một số cần tìm.

Vậy có: $P_4 = 4! = 24$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 103: Có 3 tem thư khác nhau và 3 bì thư khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách dán tem vào bì?

Hướng dẫn giải

Cố định ba bì thư. Mỗi hoán vị của ba tem thư là một cách dán.

Vậy có: $P_3 = 3! = 6$ cách dán tem vào bì.

Đề 104: Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 4 nữ và 6 nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh trên thành một hàng dọc sao cho 4 học sinh nữ phải đứng liền nhau?

Hướng dẫn giải

Xem 4 học sinh nữ đứng liền nhau như là một nhóm X.

– Xếp X và 6 học sinh nam có: $P_7 = 7!$ cách

– Xếp 4 học sinh nữ trong nhóm X có: $P_4 = 4!$ cách

Theo quy tắc nhân có:

$7! \times 4! = 120.960$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 105: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau đôi một?

Hướng dẫn giải

Kí hiệu số cần tìm là $\overline{n} = \overline{abcd}$.

Mỗi số phải tìm là một chỉnh hợp chập 4 của 7 chữ số đã cho.

Vậy có: $A_7^4 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7!}{3!}$

$= 840$ số thỏa yêu cầu bài toán

Đề 106: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau đôi một? (Lưu ý chữ số đầu tiên phải khác 0)

Hướng dẫn giải

Kí hiệu số phải tìm là: $\overline{n} = \overline{abcd}$.

Vì a khác 0 nên có 6 cách chọn a.

Mỗi cách chọn $\overline{bcd}$ là một chỉnh hợp chập 3 của 6 chữ số còn lại.

Vậy có: A_6^3 cách chọn $\overline{bcd}$

Theo quy tắc nhân có: $6 \times A_6^3 = 6 \times 120 = 720$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 107: Một nhóm học sinh gồm 7 nam và 3 nữ. Giáo viên muốn chọn 5 em trong nhóm để làm công tác xã hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Chọn 5 em tuỳ ý.

b) Phải có ít nhất một nữ và ba nam.

c) Phải có ít nhất một nữ.

Hướng dẫn giải

a) Mỗi cách chọn 5 em tùy ý trong nhóm 10 học sinh là một tổ hợp chập 5 của 10 phần tử.

Vậy trường hợp này có: $C_{10}^{5} = 252$ cách chọn.

b) Có hai trường hợp:

TH1: Chọn 1 nữ và 4 nam.

- Chọn 1 nữ có: C_{3}^{1} cách
- Chọn 4 nam có: C_{7}^{4} cách

Trường hợp này theo quy tắc nhân có:

$C_{3}^{1} \times C_{7}^{4} = 105$ cách.

TH2: Chọn 2 nữ và 3 nam.

- Chọn 2 nữ có: C_{3}^{2} cách
- Chọn 3 nam có: C_{7}^{3} cách

Trường hợp này theo quy tắc nhân có:

$C_{3}^{2} \times C_{7}^{3} = 105$ cách

Như vậy theo quy tắc cộng có:

$105 + 105 = 210$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

c) Trường hợp chọn 5 em toàn nam có:

$C_{7}^{5} = 21$ cách.

Có 252 cách tùy ý (kết quả câu a) và 21 cách chọn toàn nam.

Vậy có: $252 - 21 = 231$ cách chọn có ít nhất một nữ.

Đề 108: Một bó hồng gồm 10 bông hồng bạch và 10 bông hồng nhung. Bạn Bạch Nhung muốn chọn ra năm bông để cắm bình, trong đó nhất thiết phải có hai bông bạch và hai bông nhung. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn giải

TH1: Chọn hai bông bạch và ba bông nhung.

- Chọn 2 bông bạch có: C_{10}^{2} cách
- Chọn 3 bông nhung có: C_{10}^{3} cách

Trường hợp này có: $C_{10}^{2} \times C_{10}^{3} = 5.400$ cách

TH2: vai trò của hồng bạch và hồng nhung là như nhau nên chỉ cần lấy 5400 × 2 là ra kết quả bài toán.

*Chọn 3 bông bạch có: C_{10}^3 cách

* Chọn 2 bông nhung có: C_{10}^2 cách

Trường hợp này có: $C_{10}^3 \times C_{10}^2 = 5.400$ cách

Như vậy theo quy tắc cộng có: 5.400 + 5.400 = 10.800 cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 109: Cho một họ gồm m đường thẳng song song cắt một họ gồm n đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành

Hướng dẫn giải

Cứ hai trong m đường thẳng của họ thứ nhất cắt hai trong n đường thẳng của họ thứ hai sẽ tạo thành một hình bình hành.

* Chọn 2 trong m đường thẳng của họ thứ nhất có: C_m^2 cách

* Chọn 2 trong n đường thẳng của họ thứ hai có: C_n^2 cách

Theo quy tắc nhân có: $C_m^2 \times C_n^2$ hình bình hành thỏa yêu cầu bài toán.

Đề 110: Có bao nhiêu đường chéo trong một hình thập giác lồi?

Hướng dẫn giải

Hình thập giác lồi có 10 đỉnh.

Nối 2 trong 10 đỉnh ta được một cạnh hoặc một đường chéo.

Có $C_{20}^2 = 45$ cách nối.

⇒ Tổng số cạnh và đường chéo bằng 45. Mặt khác thập giác lồi có 10 cạnh

Vậy có: 45 – 10 = 35 đường chéo.

Đề 111: Xác định số cạnh của một đa giác lồi biết số đường chéo gấp đôi số cạnh.

Hướng dẫn giải

Giả sử đa giác lồi có n cạnh ($n \in N, n \geq 3$)

Khi đó đa giác lồi có n đỉnh.

Nối 2 trong n đỉnh ta được một cạnh hoặc một đường chéo

Có C_n^2 cách nối 2 trong n đỉnh

⇒ Tổng số cạnh và đường chéo là: C_n^2

$\Rightarrow$ Số đường chéo: $C_n^2 - n$

Theo giả thiết số đường chéo gấp đôi số cạnh nên:

$$C_n^2 - n = 2n$$

$$\Leftrightarrow C_n^2 = 3n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 3n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)!(n-1)n}{2.(n-2)!} = 3n$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n = 6n$$

$$\Leftrightarrow n - 1 = 6 \text{ (vì } n \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow n = 7$$

Vậy đa giác lồi có 7 cạnh.

Đề 112: Cho n điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Tìm n sao cho số tam giác mà đỉnh trùng với các điểm đã cho gấp đôi số đoạn thẳng được nối từ các điểm ấy?

Hướng dẫn giải

Nối hai trong n điểm đã cho ta được một đoạn thẳng

Vậy có: C_n^2 đoạn thẳng.

Nối ba điểm trong n điểm đã cho ta được một tam giác

Vậy có: C_n^3 tam giác.

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$C_n^3 = 2C_n^2 \quad (n \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 2.\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{3!(n-3)!} = 2.\frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = (n-1)n$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-1)n = 6(n-1)n$$

$$\Leftrightarrow n - 2 = 6 \text{ (vì } n - 1 \neq 0 \text{ và } n \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow n = 8.$$

Vậy n = 8 là giá trị cần tìm.

Đề 113: Chứng minh các đẳng thức:

a) $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$

b) $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$

(Trong đó, các kí hiệu đều có nghĩa)

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

a) $VT = C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2}$

$= (C_n^k + C_n^{k+1}) + (C_n^{k+1} + C_n^{k+2})$

$= C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2} = C_{n+2}^{k+2} = VP$ (đpcm)

b) $VT = 2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$= (2C_n^k + 2C_n^{k+1}) + (3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2}) + (C_n^{k+2} + C_n^{k+3})$

$= 2C_{n+1}^{k+1} + 3C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}$

$= (2C_{n+1}^{k+1} + 2C_{n+1}^{k+2}) + (C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3})$

$= 2C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3}$

$= C_{n+2}^{k+2} + (C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3})$

$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3} = VP$ (đpcm)

Đề 114: Chứng minh rằng:

a) $C_{n-1}^{m-1} = \frac{m}{n}.C_n^m \ (1 \le m \le n)$

b) $C_{m+n}^m = C_{m+n-1}^m + C_{m+n-1}^n \ (1 \le m, n)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $VT = C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$ (1)

$VP = \frac{m}{n}.C_n^m = \frac{m}{n}.\frac{n!}{m!(n-m)!}$

$= \frac{m}{n}.\frac{(n-1)!n}{(m-1)!m.(n-m)!} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$ (2)

So sánh (1) và (2), ta có:

$C_{n-1}^{m-1} = \frac{m}{n}.C_n^m$ (đpcm)

b) Ta có: $VT = C_{m+n}^{m} = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$ (3)

$$VP = C_{m+n-1}^{m} + C_{m+n-1}^{n}$$
$$= \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} + \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$
$$= \frac{(m+n-1)!n}{m!(n-1)!n} + \frac{(m+n-1)!m}{n!(m-1)!m}$$
$$= \frac{(m+n-1)!n}{m!n!} + \frac{(m+n-1)!m}{n!m!}$$
$$= \frac{(m+n-1)!(m+n)}{m!n!} = \frac{(m+n)!}{m!n!} \qquad (4)$$

So sánh (3) và (4), ta có:

$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n-1}^{m} + C_{m+n-1}^{n} \text{ (đpcm)}$$

Đề 115: Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu–tơn

a) $(a + 2b)^5$ b) $(a - \sqrt{2})^6$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$(a + 2b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4.(2b) + C_5^2 a^3(2b)^2 + C_5^3 a^2(2b)^3 + C_5^4 a(2b)^4$$
$$+ C_5^5(2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$$

b) Ta có:

$$(a - \sqrt{2})^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5(-\sqrt{2}) + C_6^2 a^4(-\sqrt{2})^2 + C_6^3 a^3(-\sqrt{2})^3$$
$$+ C_6^4 a^2(-\sqrt{2})^4 + C_6^5 a(-\sqrt{2})^5 + C_6^6(-\sqrt{2})^6$$
$$= a^6 - 6\sqrt{2}a^5 + 30a^4 - 40\sqrt{2}.a^3 + 60a^2 - 24\sqrt{2}a + 8$$

Đề 116: Tìm số hạng thứ sáu của khai triển: $(x + 2)^{15}$

Hướng dẫn giải

Số hạng thứ sáu của khai triển là

$$T_6 = C_{15}^5.x^{15-5}.2^5 = 96.096.x^{10}$$

Đề 117: Từ khai triển nhị thức Niu–tơn $(3x - 4)^{17}$ thành đa thức hãy tính tổng các hệ số của đa thức.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta có khai triển:

$$(3x - 4)^{17} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{17}x^{17} \quad (1)$$

Trong khai triển (1), thay x = 1, ta được:

$$(3-4)^{17} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{17}$$

Vậy tổng các hệ số:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{17} = -1$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 118: Có bao nhiêu số tự nhiên $\overline{n}$ có 4 chữ số khác nhau, biết:

a) $\overline{n}$ chẵn		b) $\overline{n}$ lẻ

c) $\overline{n}$ chia hết cho 5		d) $\overline{n}$ không chia hết cho 5

Đáp số: a) 2.296 số		b) 2.240 số

c) 952 số		d) 3.584 số

Đề 119: Có năm tem thư khác nhau và sáu bì thư khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra ba tem thư, ba bì thư và dán ba tem thư ấy lên ba bì thư. Một bì thư chỉ dán một tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

Đáp số: 1.200 cách.

Đề 120: Cho hai đường thẳng $\Delta_1 // \Delta_2$. Trên đường thẳng Δ_1 có 10 điểm, trên đường thẳng Δ_2 có 20 điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo bởi các điểm đã cho?

Đáp số: 2.800 tam giác.

Đề 121: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng, số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n.

Đáp số: n = 8

Đề 122: Trên giá sách có 30 tập sách. Có thể xếp theo bao nhiêu cách khác nhau để có:

a) Tập 1 và tập 2 đứng cạnh nhau.

b) Tập 1 và tập 2 không đứng cạnh nhau.

Đáp số: a) 2.29! cách

b) 28.29! cách

Đề 123: Với các kí hiệu có nghĩa, chứng minh đẳng thức:

$$C_n^k + 3.C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

Đề 124: Chứng minh các đẳng thức:

a) $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$		b) $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2A_{n+k}^{k-1}$

Đề 125: Chứng minh:

$$1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + (n-1)P_{n-1} = P_n$$

Đề 126: Tính tổng:

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$$

Đáp số: 2^6

Đề 127: Tìm số n nguyên dương sao cho:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 6.561$$

Đáp số: $n = 8$

§3. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Phép thử và biến cố

1. *Phép thử, không gian mẫu*

* Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

Để đơn giản, phép thử ngẫu nhiên được gọi tắt là phép thử.

* Tập hợp mọi kết quả của một phép thử gọi là không gian mẫu (của phép thử) và kí hiệu là Ω.

2. *Biến cố*

a) Định nghĩa:

* Biến cố là một tập hợp con của không gian mẫu.

– Người ta thường kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa A, B, C...

– Từ nay về sau, khi nói các biến cố A, B, ... mà không nói gì thêm thì ta hiểu chúng cùng liên quan với một phép thử.

* Tập Ø được gọi là biến cố không thể (gọi tắt là biến cố không), còn tập Ω được gọi là biến cố chắc chắn.

* Ta nói rằng A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của phép thử là một phần tử của A.

Các phần tử của A còn được gọi là các kết quả thuận lợi cho A (xảy ra).

b) Phép toán trên các biến cố

- * Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A và được kí hiệu là $\overline{A}$.
- * Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B.
- * Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B.
- * Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B xung khắc.

Như vậy A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cũng xảy ra.

II. Xác suất của biến cố

1. *Định nghĩa cổ điển của xác suất*

Giả sử A là một biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\frac{N(A)}{N(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A.

Kí hiệu: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

2. *Tính chất*

Giả sử A và B là các biến cố liên quan với một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó ta có:

Định lí:

a) $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$

b) Với mọi biến cố A, ta có: $0 \le P(A) \le 1$

c) Nếu A và B xung khắc thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ (công thức cộng)}$$

Nhận xét:

a) Với mọi biến cố A, ta có:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

b) Với hai biến cố A và B bất kì, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3. *Định nghĩa thống kê của xác suất*

Giả sử một phép thử được lặp lại n lần trong các điều kiện như nhau. Kí hiệu n(A) là số lần xuất hiện biến cố A trong dãy n phép thử đó. Tỉ số $\frac{n(A)}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A. Dãy tần suất $\frac{n(A)}{n}$ có tính ổn định, nghĩa là khi n tăng dần, $\frac{n(A)}{n}$ càng ngày càng gần một số xác định mà ta gọi nó là xác suất của biến cố A theo quan điểm thống kê (số đó cũng chính là số P(A) trong định nghĩa cổ điển của xác suất).

B/ GIẢI TOÁN

Đề 128:

a) Gieo một đồng tiền. Kí hiệu S là kết quả "mặt sấp xuất hiện" và N là kết quả "mặt ngửa xuất hiện".

Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Gieo một đồng tiền hai lần, hãy mô tả không gian mẫu.

c) Gieo một đồng tiền ba lần, hãy mô tả không gian mẫu.

Hướng dẫn giải

a) $\Omega = \{S; N\}$

b) $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$

c) $\Omega = \{SSS; SSN; SNS; NSS; SNN; NSN; NNS; NNN\}$

Đề 129: Gieo một đồng tiền ba lần. Gọi A là biến cố "mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần"

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Xác định biến cố A.

c) Tính xác suất của biến cố A.

Hướng dẫn giải

a) Không gian mẫu:

$\Omega = \{SSS; SSN; SNS; NSS; SNN; NSN; NNS; NNN\}$

b) Biến cố A:

$A = \{SSN; SNS; NSS; SNN; NSN; NNS; NNN\}$

c) Ta có: $N(\Omega) = 8$

$N(A) = 7$

Vậy xác suất của biến cố A:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

Đề 130: Ba bà mẹ, mỗi người sinh được 1 đứa con. Tính xác suất để bé sinh ra.

a) Chỉ có một gái.

b) Nhiều nhất một gái.

Hướng dẫn giải

Ba bà mẹ, mỗi người sinh 1 con. Kí hiệu t là sinh con trai, g là sinh con gái. Ta có không gian mẫu:

$$\Omega = \{ttt; ttan; tant; ggt; tang; gtan; ggt; ggg\}$$

a) Biến cố chỉ có một gái là:

$$A = \{ttan; tant; gtt\}$$

Ta có: $N(\Omega) = 8$; $N(A) = 3$

Vậy xác suất của biến cố A (tức chỉ có 1 gái) là:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

b) Gọi B là biến cố nhiều nhất một gái

Ta có: $B = \{ttt; ttan; tant; gtt\}$

Vậy xác suất để bé sinh ra nhiều nhất một gái là:

$$P(B) = \frac{n(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Đề 131: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất.

Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Xuất hiện mặt chẵn"

B: "Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3"

C: "Xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 3"

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$N(\Omega) = 6$$

Ta có: * $A = \{2, 4, 6\}$

$N(A) = 3$. Vậy $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

* $B = \{3, 6\}$

$N(B) = 2$. Vậy $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$

* C = {3, 4, 5, 6}

$$N(C) = 4. \text{ Vậy } P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Đề 132: Có chín miếng bìa như nhau được ghi từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai miếng bìa và xếp theo thứ tự từ trái sang phải. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Số tạo thành là số chẵn"

b) B: "Số tạo thành là số chia hết cho 5"

c) C: "Số tạo thành có chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị"

Hướng dẫn giải

Mỗi kết quả của phép thử là một chỉnh hợp chập 2 của 9 phần tử. Vậy, không gian mẫu gồm:

$$N(\Omega) = A_9^2 = 72 \text{ (kết quả đồng khả năng)}$$

a) Kí hiệu số tạo thành là: $\overline{n} = \overline{ab}$

$\overline{n} \in A$ nên: $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

Vậy có: 4 cách chọn b

và 8 cách chọn a (do $a \neq b$)

Theo quy tắc nhân, ta có:

$$N(A) = 4 \times 8 = 32$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

b) $\overline{n} \in B$ nên $b = 5$

Có 1 cách chọn b

và 8 cách chọn a.

Theo quy tắc nhân, ta có:

$$N(B) = 1 \times 8 = 8$$

$$\text{Vậy: } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

c) $\overline{n} \in C \Leftrightarrow a < b$

Rõ ràng mỗi số $\overline{ab}$ như vậy là một tổ hợp chập 2 của 9 phần tử và ngược lại.

Do đó. $N(C) = C_9^2 = 36$

$$\text{Vậy: } P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

Đề 133: Một bình đựng 6 viên bi chỉ khác nhau về màu, 2 xanh, 2 vàng, 2 đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên:

Tính xác suất để được:

a) 2 viên bi xanh. b) 2 viên khác màu.

Hướng dẫn giải

a) Một bình đựng 6 viên bi

* Lấy ngẫu nhiên 2 trong 6 viên bi có: $C_6^2 = 15$ cách

Vậy không gian mẫu Ω có 15 phần tử.

* Chọn 2 viên bi xanh có: 1 cách

Vậy biến cố A để được 2 viên bi xanh chỉ có 1 phần tử.

Do đó: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{15}$

b) Để chọn 2 viên bi khác màu, có 3 trường hợp:

* *TH1*: 1 xanh, 1 vàng:

– Chọn 1 xanh từ 2 xanh có: 2 cách

– Chọn 1 vàng từ 2 vàng có: 2 cách

Trường hợp này theo quy tắc nhân có: $2 \times 2 = 4$ cách

* *TH2*: 1 xanh, 1 đỏ:

Tương tự có 4 cách

* *TH3*: 1 vàng, 1 đỏ

Tương tự có 4 cách

Như vậy theo quy tắc cộng, biến cố B để được hai viên bi khác màu có:

$4 + 4 + 4 = 12$ phần tử

Vậy: $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Đề 134: Từ một hộp chứa 3 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tìm xác suất để lấy được 2 viên bi màu trắng và một viên bi màu đen.

Hướng dẫn giải

Hộp bi có chứa 8 viên bi:

* Chọn ngẫu nhiên 3 trong 8 viên bi có: $C_8^3 = 56$ cách

Vậy không gian mẫu Ω có 56 phần tử

* Chọn 2 trong 3 viên bi trắng có: $C_3^2 = 3$ cách

Chọn 1 trong 5 viên bi đen có: $C_5^1 = 5$ cách

Theo quy tắc nhân có: $3 \times 5 = 15$ cách

Vậy biến cố A để được 2 viên bi trắng, 1 viên bi đen có 15 phần tử.

Như vậy xác suất cần tìm:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{15}{56}$$

Đề 135: Gieo đồng thời hai con súc sắc, một con màu đỏ và một con màu xanh. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Con đỏ xuất hiện mặt 6 chấm"

B: "Con xanh xuất hiện mặt 6 chấm"

C: "Ít nhất một con xuất hiện mặt 6 chấm"

D: "Không có con nào xuất hiện mặt 6 chấm"

E: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con bằng 8"

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu $\Omega = \{(a, b) / 1 \leq a, b \leq 6\}$

Trong đó a là số chấm trên con đỏ, b là số chấm trên con xanh.

Như vậy không gian mẫu Ω có 36 phần tử.

* Ta có: $A = \{(6, b) / 1 \leq b \leq 6\}$

Do đó: $N(A) = 6$

Vậy $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

* $B = \{a, 6) / 1 \leq a \leq 6\}$

Do đó: $N(B) = 6$

Vậy $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

* Ta có: $C = A \cup B$

Mặt khác rõ ràng: $A \cap B = \{(6, 6)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

Do đó: $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

* Ta có: $D = \overline{C}$

Do đó: $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$

* E = {(2, 6); (6, 2); (3, 5); (5, 3), (4, 4)}

$\Rightarrow N(E) = 5$

Vậy: $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{36}$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 136: Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất và quan sát số chấm xuất hiện.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Xuất hiện mặt chẵn chấm"

B: "Xuất hiện mặt lẻ chấm"

C: "Xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 3"

c) Tính xác suất của các biến cố trên.

Đáp số: a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

c) $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{2}{3}$

Đề 137: Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất hai lần và chú ý đến số chấm xuất hiện ở mỗi lần gieo.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau và đếm số phần tử của các biến cố đó:

A: "Số chấm ở hai mặt bằng nhau"

B: "Tổng số chấm không nhỏ hơn 10"

C: "Mặt 5 chấm xuất hiện trong lần gieo đầu"

D: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần"

c) Tính xác suất của các biến cố trên.

Đáp số:

a) $\Omega = \{(a, b) / 1 \le a, b \le 6\}$

b) * A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

$N(A) = 6$

* B = {(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)}

$N(B) = 6$

* C = {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

N(C) = 6

* D = {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)"

N(D) = 11

c) $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{1}{6}$; $P(D) = \frac{11}{36}$

Đề 138: Một con súc sắc được gieo ba lần, quan sát số chấm xuất hiện.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Tổng số chấm trong 3 lần gieo là 6"

B: "Số chấm trong lần gieo thứ nhất bằng tổng số chấm của lần gieo thứ hai và ba"

Đáp số: a) $\Omega = \{(a, b, c) / 1 \le a, b, c \le 6\}$

b) $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(B) = \frac{15}{36}$

Đề 139: Có bốn tấm bìa như nhau được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên lần lượt ba tấm và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

Tính xác suất của biến cố:

A: "Tổng các số trên ba tấm bìa là 8"

Đáp số: $P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Đề 140: Tính xác suất của biến cố:

A: "Bi trắng xuất hiện khi rút ngẫu nhiên một bi từ một hộp có 4 bi trắng, 5 bi đỏ và 5 bi xanh"

Đáp số: $P(A) = \frac{1}{3}$

Đề 141: Một lớp có 60 sinh viên, trong đó 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Sinh viên được chọn học tiếng Anh"

b) B: "Sinh viên được chọn chỉ học tiếng Pháp"

c) C: “Sinh viên được chọn học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp”

d) D: “Sinh viên được chọn không học tiếng Anh lẫn tiếng Pháp”

Đáp số: a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

d) $P(D) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{6}$

Đề 142: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất một lần. Kí hiệu b là số chấm xuất hiện khi gieo. Tính xác suất sao cho phương trình sau có nghiệm: $x^2 + bx + 1 = 0$

Đáp số: $\frac{5}{6}$

Đề 143: Một hộp chứa 100 quả cầu đỏ và xanh, được ghi các số 0 hoặc 1 và được phân bố như sau:

	Đỏ	Xanh
0	48	12
1	16	24

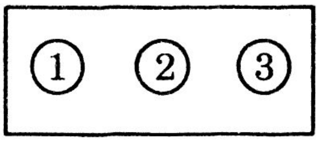
(60 quả ghi số 0; 40 quả ghi số 1; 64 quả đỏ; 36 quả xanh). Lấy ngẫu nhiên một quả. Tính xác suất sao cho quả được lấy:

a) Màu đỏ b) Màu xanh

c) Ghi số 0 d) Đỏ hoặc ghi số 0

Đáp số: a) $\frac{64}{100}$ b) $\frac{36}{100}$ c) $\frac{60}{100}$ d) $\frac{76}{100}$

Đề 144: Một hộp chứa 3 quả cầu được đánh số 1, 2, 3. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng quả cầu không hoàn lại. Tính xác suất sao cho quả ① không được lấy lần thứ nhất, quả ② không được lấy lần thứ hai và quả 3 không được lấy lần thứ ba.



Đáp số: $\frac{1}{3}$

§4. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa

Giả sử A và B là hai biến cố, $P(A) \neq 0$. Xác suất của biến cố B được tính trong điều kiện biến cố A đã xảy ra được gọi là *xác suất của biến cố B với điều kiện A* và được kí hiệu là P(B/A)

Nhận xét: $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

II. Công thức nhân xác suất

* $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

* $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$

III. Các biến cố độc lập

1. *Định nghĩa:*

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

2. *Nhận xét:*

A và B độc lập $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ và B độc lập.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 145: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo không bé hơn 10, nếu:

a) Lần gieo đầu tiên xuất hiện mặt 5 chấm.

b) Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần.

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu $\Omega = \{(a, b) / 1 \leq a, b \leq 6\}$

Ta có: $N(\Omega) = 36$

Kí hiệu:

A: "Tổng số chấm trong hai lần gieo lớn hơn hoặc bằng 10"

B: "Lần đầu xuất hiện mặt 5 chấm"

C: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần"

a) Ta có: $A = \{(4, 6); (6, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 5)\}$

$B = \{(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6)\}$

Do đó: $A \cap B = \{(5, 5), (5, 6)\}$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Vậy: $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

b) $C = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), 6, 5)\}$

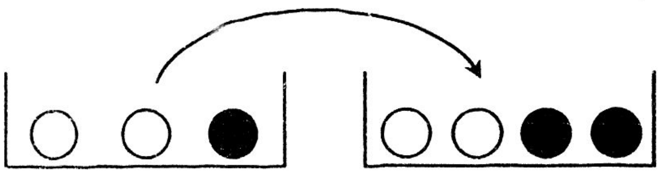
$A \cap C = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$

$$P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap C) = \frac{N(A \cap C)}{N(\Omega)} = \frac{3}{36}$$

Vậy: $$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{3}{11}$$

Đề 146: Có hai hộp. Hộp thứ nhất chứa hai bi trắng và một bi đen, hộp thứ hai chứa hai bi trắng và hai bi đen. Từ hộp thứ nhất, lấy ngẫu nhiên một bi, xem màu của nó rồi bỏ vào hộp thứ hai. Sau đó từ hộp thứ hai, lấy ngẫu nhiên ra một bi.



Tính xác suất để:

Cả hai bi lấy ra đều trắng.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu:

A: "Bi lấy được từ hộp thứ nhất ra là trắng"

B: "Bi lấy được từ hộp thứ hai ra là trắng"

* Ta có: $P(A) = \frac{2}{3}$

Nếu từ hộp thứ nhất lấy ra bi trắng và bỏ vào hộp thứ hai thì hộp thứ hai có ba bi trắng và hai bi đen, do đó:

$$P(B / A) = \frac{3}{5}$$

Theo đề yêu cầu, ta cần tính $P(A \cap B)$

Mặt khác: $P(A \cap B) = P(A).P(B / A)$

$$= \frac{2}{3}.\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Đề 147: Một đồng tiền cân đối, đồng chất được gieo hai lần. Xét các biến cố:

A: "Lần đầu xuất hiện mặt sấp"

B: "Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa"

Chứng minh A và B là hai biến cố độc lập.

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$

$$A = \{SS, SN\}$$

$$B = \{SN, NN\}$$

Do đó: $A \cap B = \{SN\}$

Ta có: $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Vậy: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Nghĩa là: A và B là hai biến cố độc lập.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 148: Hai bạn Bắc và Nam chơi trò gieo con súc sắc cân đối và đồng chất. Nam gieo trước, Bắc gieo sau. Giả sử Nam gieo được mặt 4 chấm. Tính xác suất sao cho Bắc thắng, nghĩa là số chấm mà Bắc gieo được lớn hơn số chấm mà Nam gieo được.

Đáp số: $\frac{1}{3}$

Đề 149: Hai người độc lập nhau cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Xác suất trúng bia của họ lần lượt là $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$. Tính xác suất của các biến cố sau:

A "Cả hai đều bắn trúng"

B "Cả hai đều bắn trượt"

C "Ít nhất một người bắn trúng"

D " Có đúng một người bắn trúng"

Đáp số: $P(A) = \frac{1}{15}$; $P(B) = \frac{8}{15}$; $P(C) = \frac{7}{15}$; $P(D) = \frac{2}{5}$

Đề 150: Gieo con súc sắc hai lần liên tiếp. Kí hiệu:

A: "Lần đầu xuất hiện mặt chẵn"

B: "Lần thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm"

Chứng minh A và B là hai biến cố độc lập.

Đề 151: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Kí hiệu:

A: "Xuất hiện mặt 1, 2 hoặc 3 chấm"

B: "Xuất hiện mặt 3 hoặc 4 chấm"

C: "Xuất hiện mặt 1, 2, 3 hoặc 4 chấm"

D: "Xuất hiện mặt 4 hoặc 5 chấm"

Chứng tỏ rằng:

a) A và B độc lập.

b) C và D không độc lập.

§5. BIẾN NGẪU NHIÊN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

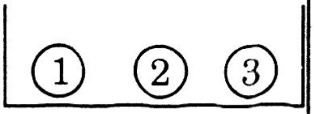
I. Biến ngẫu nhiên

Trong thực tiễn, có nhiều đại lượng mà giá trị của nó là số thực, phụ thuộc vào kết quả của phép thử, các đại lượng đó được gọi là các đại lượng ngẫu nhiên hay biến ngẫu nhiên.

Người ta thường kí hiệu biến ngẫu nhiên bằng một trong các chữ in hoa X, Y, Z... Nếu X là biến ngẫu nhiên và a là một giá trị của nó thì khi phép thử được tiến hành, X có thể nhận giá trị a hoặc không, nghĩa là "X nhận giá trị" là một biến cố (liên quan với phép thử). Để đơn giản ta kí hiệu biến cố "Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị a" $(X = a)$ và xác suất của biến cố này là $P(X = a)$.

II. Bảng phân phối xác suất

Xét ví dụ: Một hộp chứa 3 quả cầu được đánh số 1, 2 và 3. Lấy ngẫu nhiên hai quả. Kí hiệu X là tổng các số trên hai quả và Y là số lớn nhất trong hai số ghi trên hai quả đã được lấy.



a) Mô tả không gian mẫu.

b) Tính các giá trị của các biến cố ngẫu nhiên X và Y.

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{\{1, 2\}; \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

b) Ta có: $X(\{a, b\}) = a + b$

$Y(\{a, b\}) = \max(a, b)$

Do đó: $X(\{1, 2\}) = 3$; $X(\{1, 3\}) = 4$; $X(\{2, 3\}) = 5$

$Y(\{1, 2\}) = 2$; $Y(\{1, 3\}) = 3$; $Y(\{2, 3\}) = 3$

Từ đó, X có tập giá trị là $X(\Omega) = \{3, 4, 5\}$

Y có tập giá trị là $Y(\Omega) = \{2, 3\}$

Từ ví dụ trên ta thấy:

* $(X = 3) = \{\{1, 2\}\}$; $(X = 4) = \{\{1, 3\}\}$; $(X = 5) = \{\{2, 3\}\}$

$$P(X = 3) = \frac{N(X = 3)}{N(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

Tương tự: $P(X = 4) = P(X = 5) = \frac{1}{3}$

* $(Y = 2) = \{\{1, 2\}\}$; $(Y = 3) = \{\{1, 3\}; \{2, 3\}\}$

$$P(Y = 2) = \frac{N(Y = 2)}{N(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3) = \frac{N(Y = 3)}{N(\Omega)} = \frac{2}{3}$$

Ta có các bảng 1 và 2 như sau:

X	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Các bảng 1 và 2 lần lượt được gọi là *bảng phân phối xác suất* của biến ngẫu nhiên X và Y.

Tổng quát: Giả sử X là biến ngẫu nhiên có tập giá trị

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Đặt: $p_1 = P(X = x_1)$; $p_2 = P(X = x_2)$, ..., $p_n = P(X = x_n)$

Lúc đó ta có bảng phân phối các xác suất của X như sau:

X	x_1	x_2	x_3	......	x_k	......	x_n
P	p_1	p_2	p_3		p_k		p_n

Các số p_k phải thỏa các điều kiện:

$$\begin{cases} p_k \geq 0 \text{ với } k = 1, 2, \ldots, n \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \end{cases}$$

B/ BÀI TOÁN

Đề 152: Một đồng tiền cân đối và đồng chất được gieo ba lần.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt sấp trong ba lần gieo.

* Tìm tập giá trị của X.

* Xác định biến cố (X = 1)

* Lập bảng phân phối xác suất của X.

Hướng dẫn giải

a) Không gian mẫu:

$$\Omega = \{SSS; SSN; SNS; NSS; SNN; NSN; NNS; NNN\}$$

Ta có: $N(\Omega) = 8$

b) Ta có: X(SSS) = 3; X(SSN) = 2; X(SNS) = 2; X(NSS) = 2;

X(SNN) = 1; X(NSN) = 1; X(NNS) = 1; X(NNN) = 0

Vậy tập giá trị $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

* Biến cố $(X = 1) = \{SNN; NSN; NNS\}$

* Ta có: $P(X = 0) = \frac{1}{8}$; $P(X = 1) = \frac{3}{8}$; $P(X = 2) = \frac{3}{8}$; $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

Bảng phân phối xác suất của X:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Đề 153: Từ một hộp chứa 2 bi đỏ và 2 bi xanh, lấy ngẫu nhiên 3 bi.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Gọi X là số bi đỏ trong ba bi được lấy ra.

* Tìm tập giá trị của X.

* Xác định biến cố $(X = 1)$

* Lập bảng phân phối xác suất của X.

Hướng dẫn giải

a) Kí hiệu hai bi đỏ lần lượt là Đ, đ và hai bi xanh lần lượt là X, x.

Ta có không gian mẫu.

$\Omega = \{$ĐđX; Đđx; ĐXx; đXx$\}$

Như vậy số phần tử của không gian mẫu là:

$N(\Omega) = 4$ (Nhận xét $N(\Omega) = C_4^3$)

b) * Ta có: X(ĐđX) = 2; X(Đđx) = 2; X(ĐXx) = 1; X(đXx) = 1

Vậy tập giá trị $X(\Omega) = \{1, 2\}$

* Biến cố $(X = 1) = \{$ĐXx; đXx$\}$

* Ta có: $P(X = 1) = \frac{N(X = 1)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$P(X = 2) = \frac{N(X = 2)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 154: Có hai cái hộp. Hộp thứ nhất chứa hai quả cầu trắng, ba quả cầu đen, hộp thứ hai chứa một quả cầu trắng và bốn quả cầu đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu X là tổng số quả trắng lấy được. Lập bảng phân phối của X.

Đáp số:

X	0	1	2
P	$\frac{12}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{2}{25}$

Đề 155: Từ một hộp chứa 4 bi đỏ và 3 bi xanh, lấy ngẫu nhiên ba bi. Gọi X là số bi xanh trong ba bi được lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất của X.

Đáp số:

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

§6. KÌ VỌNG VÀ PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Kì vọng*

* *Định nghĩa*

Giả sử X là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất:

X	x_1	x_2	......	x_k	......	x_n
P	p_1	p_2	......	p_k	......	p_n

Kì vọng của biến ngẫu nhiên X là một số, kí hiệu E(X), được xác định bởi công thức:

$$\boxed{E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k + \ldots + x_np_n}$$

Chú ý: Số này còn gọi là giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên X.

* Các tính chất của kì vọng

Trong cùng một phép thử, với X và Y là hai biến ngẫu nhiên bất kì, ta có:

a) $E(cX) = c\,E(X)$ với c là hằng số

b) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

2. ***Phương sai***

* *Định nghĩa*

Giả sử X là biến ngẫu nhiên lấy các giá trị $x_1, x_2..., x_n$ với các xác suất tương ứng là $p_1, p_2,..., p_n$ là $E(X) = a$

Phương sai của biến ngẫu nhiên X là một số, kí hiệu V(X) hay Van(X), được xác định bởi

$$\boxed{V(X) = (x_1 - a)^2p_1 + (x_2 - a)^2p_2 + ... + (x_n - a)^2p_n}$$

Ngoài phương sai V(X), ta còn dùng $\sqrt{V(X)}$ để đánh giá mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên so với kì vọng của nó và nó được gọi là độ lệch chuẩn.

Độ lệch chuẩn của X là số $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

B/ GIẢI TOÁN

Đề 156: Một đồng tiền cân đối và đồng chất được gieo bốn lần. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt sấp trong bốn lần gieo đó.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Lập bảng phân phối xác suất của X.

c) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Hướng dẫn giải

a) Không gian mẫu:

Ω = {SSSS, SSSN, SSNS, SNSS, NSSS, SSNN, SNSN, SNNS, NSNS, NSSN, NNSS, SNNN, NSNN, NNSN, NNNS, NNNN}

Nhận xét: $N(\Omega) = 16$.

b) Ta có: * X(SSSS) = 4

* X(SSSN) = X(SSNS) = X(SNSS) = X(NSSS) = 3

* X(SSNN) = X(SNSN) = X(SNNS) = X(NSNS) = X(NSSN) = X(NNSS) = 2

* X(SNNN) = X(NSNN) = X(NNSN) = X(NNNS) = 1

* X(NNNN) = 0

Tập giá trị: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Ta có bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Từ đó ta có:

* Kì vọng: $E(X) = 0.\frac{1}{16} + 1.\frac{4}{16} + 2.\frac{6}{16} + 3.\frac{4}{16} + 4.\frac{1}{16} = 2$

* Phương sai: $V(X) = (0-2)^2.\frac{1}{16} + (1-2)^2.\frac{4}{16} + (2-2)^2.\frac{6}{16}$

$+ (3-2)^2.\frac{4}{16} + (4-2)^2.\frac{1}{16} = 1$

* Độ lệch chuẩn $\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$.

Đề 157: Cho biến ngẫu nhiên X với bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

a) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

b) Tính kì vọng của 3X + 3

Hướng dẫn giải

a) * $E(X) = 0.\frac{5}{15} + 1.\frac{7}{15} + 2.\frac{1}{15} + 3.\frac{2}{15} = 1$

* $V(X) = (0-1)^2.\frac{5}{15} + (1-1)^2.\frac{7}{15} + (2-1)^2.\frac{1}{15} + (3-1)^2.\frac{2}{15} = \frac{14}{15}$

* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{14}{15}} \approx 0,97$

b) * $E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3.1 + 2 = 5$

Đề 158: Một mẫu gồm các chiều cao (đơn vị: cm) của 36 học sinh được chọn từ một trường là:

150 152 154 157 155 160 164 152 154 155 157 164
167 172 169 150 152 154 169 167 164 164 152 155
160 164 167 169 155 155 160 160 162 160 162 162

Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ 36 học sinh trên. Kí hiệu X là chiều cao của học sinh đó.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Tính kì vọng, phương sai của X.

Hướng dẫn giải

a) Không gian mẫu gồm 36 phần tử đồng khả năng

Bảng phân phối xác suất của X:

X	150	152	154	155	157	160	162	164	167	169	172
P	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) * $E(X) = 150.\frac{2}{36} + 152.\frac{4}{36} + 154.\frac{3}{36} + 155.\frac{5}{36} + 157.\frac{2}{36} + 160.\frac{5}{36} + 162.\frac{3}{36} + 164.\frac{5}{36} + 167.\frac{3}{36} + 169.\frac{3}{36} + 172.\frac{1}{36} = 159{,}58$

* Tương tự ta tính được phương sai:

$V(X) = 36{,}85$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 159: Một bình có 10 viên bi, trong đó có 2 viên loại một, mỗi viên nặng 50 gam, 3 viên loại hai mỗi viên nặng 40 gam và 5 viên bi loại ba, mỗi viên nặng 30 gam.

Kí hiệu X là trọng lượng của một viên bi được lấy ngẫu nhiên.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Đáp số: a)

X	30	40	50
P	0,5	0,3	0,2

b) * $E(X) = 37$ * $V(X) = 60$ $\sigma(X) = 7{,}7$.

Đề 160: Hai bạn A và B chơi trò chơi gieo một con súc sắc lấy kẹo theo luật sau: Nếu xác suất một trong các mặt 2, 3, 4 hoặc 5 chấm thì B cho A chín cái kẹo. Nếu xuất hiện mặt 1 chấm hoặc 6 chấm thì A cho B số kẹo bằng 6 lần số chấm xuất hiện trên con súc sắc. Tính số kẹo trung bình mà bạn A có thể nhận được sau một ván.

Đáp số: Trung bình mỗi ván bạn A mất một cái kẹo.

Đề 161: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Kí hiệu X là tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo. Tính kì vọng, phương sai của X.

Đáp số: E(X) = 7   V(X) = 5,83

Đề 162: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Kí hiệu X là số chấm xuất hiện trên con súc sắc, Y là biến ngẫu nhiên nhận giá trị 1 nếu X nhận giá trị lẻ và nhận giá trị 3 nếu X nhận giá trị chẵn.

Tính kì vọng của X; Y; X + 2Y

Đáp số: E(X) = 3,5; E(Y) = 2; E(X + 2Y) = 7,5

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

TOÁN TRẮC NGHIỆM

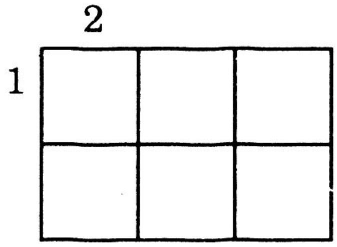
Đề 163:

1. Cho hai tập hợp A = {a, b, c, d}; B = {c, d, e}. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. N(A) = 4   B. N(B) = 3

C. $N(A \cap B) = 2$ D. $N(A \cup B) = 7$

2. Trong hình sau có mấy hình vuông?



A. 6   B. 7   C. 8   D. 9

3. Kí hiệu nào sau đây dùng để tính số chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử.

A. P_3 B. P_7 C. C_7^3 D. A_7^3

4. Có bao nhiêu số có 5 chữ số khác 0 và khác nhau?

A.15120 B. 126 C. 30240 D. 252

5. Một tổ có 6 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đoàn đại biểu sao cho trong đó có 3 nam, 2 nữ?

A. 252 B. 26 C. 120 D. 1440

Đề 164:

1. Trên giá sách có 30 tập sách khác nhau được đánh số theo thứ tự. Có thể xếp bao nhiêu cách khác nhau để tập 1 và tập 2 đứng cạnh nhau?

A. 29! B. 2.29! C. 30! D. 2.30!

2. Cho tập hợp X = {1, 2, 3, 4, 5}. X có bao nhiêu tập con gồm ba phần tử?

A. 10 B. 32 C. 8 D. 60

3. Giải phương trình $C_n^3 = 5C_n^1$. Đáp số là:

A. n = 6 B. n = 7 C. n = 8 D. n = –4; n = 7

4. Tìm số n nguyên dương sao cho:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 2^3C_n^3 + ... + 2^nC_n^n = 6561$$

A. n = 5 B. n = 6 C. n = 7 D. n = 8

5. Xác định số cạnh của một đa giác lồi biết số đường chéo gấp đôi số cạnh.

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

Đề 165:

1. Gieo một con súc sắc ba lần. Không gian mẫu gồm:

A. 18 phần tử B. 36 phần tử C. 72 phần tử D. 216 phần tử

2. Gieo hai con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con không giống nhau là:

A. $\frac{6}{36}$ B. $\frac{30}{36}$ C. $\frac{12}{36}$ D. $\frac{24}{36}$

3. Sáu học sinh được chọn ngẫu nhiên từ một tổ gồm tám nam và bốn nữ. Xác suất để chọn được ít nhất ba nữ là:

A. $\frac{252}{924}$ B. $\frac{224}{924}$ C. $\frac{28}{924}$ D. $\frac{672}{924}$

4. Cho hai biến cố A và B với $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{4}$ và $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ B. A và B độc lập

C. A và B xung khắc D. $P(B/A) = \frac{1}{4}$

5. Lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu từ 15 quả cầu được đánh số từ 1 đến 15. Giả sử số ghi trên quả cầu ấy là n. Tính xác suất sao cho $n \geq 7$ và n chẵn.

A. $\frac{9}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{5}{15}$ D. $\frac{3}{15}$

ĐÁP ÁN

Đề 163:

1. D 2. C 3. D 4. A 5. C

Đề 164:

1. B 2. A 3. B 4. D 5. A

Đề 165:

1. D 2. B 3. A 4. C 5. B

Chương 3. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

- * Phương pháp quy nạp toán học
- * Dãy số
- * Cấp số cộng
- * Cấp số nhân

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Phương pháp quy nạp toán học:

Để chứng minh những mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học (gọi tắt là phương pháp quy nạp) như sau:

Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp).

Chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$. Khi đó ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

B/ BÀI TOÁN

Đề 166: Chứng minh rằng:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Hướng dẫn giải

* Khi $n = 1$: $VT = 1$

$$VP = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Do đó VT = VP. Nghĩa là mệnh đề đúng với $n = 1$.

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$. Nghĩa là:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1, tức là:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \quad (2)$$

Thật vậy:

$$(1) \Rightarrow 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Nghĩa là (2) đúng

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta đều có:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Đề 167: Chứng minh rằng:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Hướng dẫn giải

* Khi n = 1: VT = 1

VP = 1^2 = 1

Do đó: VT = VP. Nghĩa là mệnh đề đúng với n = 1

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$. Nghĩa là :

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2. \quad (1)$$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1, tức là:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \quad (2)$$

Thật vậy:

$$(1) \Rightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

$$= k^2 + [2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Nghĩa là (2) đúng.

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta đều có: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Đề 168: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

Đặt $A_n = n^3 + 11n$.

* Khi n = 1: $A_1 = 1^3 + 11.1 = 12$. Vậy A_1 chia hết cho 6.

*Giả sử $A_k = k^3 + 11k$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh $A_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1)$ cũng chia hết cho 6.

Thật vậy:
$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k+1)^3 + 11(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 \\ &= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12 \\ &= A_k + 3k(k+1) + 12 \end{aligned}$$

Vì $A_k \vdots 6$; $3k(k+1) \vdots 6$ và $12 \vdots 6$

nên $A_{k+1} \vdots 6$.

Vậy: $A_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 169: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Đề 170: Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

Đề 171: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

b) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

c) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

Đề 172: Chứng minh các bất đẳng thức sau đúng với $n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 2$

a) $3^n > 3n + 1$ b) $2^n - n > \dfrac{3}{2}$

§2. DÃY SỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa

1. *Dãy số*

Mỗi hàm số u xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

$$n \to u(n)$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, ..., u_n...$ trong đó $u_n = u(n)$ hoặc vắn tắt là (u_n) và gọi u_n là số hạng tổng quát của dãy số.

2. *Dãy số hữu hạn*

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, ..., m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là:

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_m.$$

II. Cách cho dãy số

1. *Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát*

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^n + 1$

Khi đó: $u_1 = 2^1 + 1 = 3$

$u_2 = 2^2 + 1 = 5$

$u_3 = 2^3 + 1 = 9$

....

2. *Dãy số cho bằng phương pháp mô tả*

Người ta cho một mệnh đề mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số. Tuy nhiên không thể tìm được ngay u_n với n tùy ý.

3. *Dãy số cho bằng công thức truy hồi*

Công thức truy hồi cho phép tính được u_n thông qua các số hạng trước nó.

Ví dụ: Dãy Phi–bô–na–xi (Fibonacci) là dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ với } n \geq 3 \end{cases}$$

III. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

1. *Dãy số tăng, dãy số giảm*

Định nghĩa 1

* Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

* Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Các dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu.

Chú ý:

a) Một dãy số có thể không tăng, không giảm.

b) Có hai phương pháp chính để chứng minh dãy số đơn điệu.

Phương pháp 1: Xét hiệu $M = u_{n+1} - u_n$

* Nếu $M > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy tăng

* Nếu $M < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy giảm

Phương pháp 2:

Nếu $u_n > 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số: $M = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

* Nếu $M > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy tăng

* Nếu $M < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy giảm

2. *Dãy số bị chặn*

Định nghĩa 2

* Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq M.$$

* Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq m$$

* Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn, nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số m, M sao cho:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m \le u_n \le M$$

Chú ý: Các dấu "=" nêu trên không nhất thiết phải xảy ra.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 173: Viết 5 số hạng đầu của các dãy số cho bởi công thức:

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ d) $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

$u_1 = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$u_3 = \dfrac{3}{2^3} = \dfrac{3}{8}$; $u_4 = \dfrac{4}{2^4} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$; $u_5 = \dfrac{5}{2^5} = \dfrac{5}{32}$

b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

$u_1 = \dfrac{1}{3}$; $u_2 = \dfrac{3}{5}$; $u_3 = \dfrac{7}{9}$; $u_4 = \dfrac{15}{17}$; $u_5 = \dfrac{31}{33}$

c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$u_1 = 2$; $u_2 = \dfrac{9}{4}$; $u_3 = \dfrac{64}{27}$; $u_4 = \dfrac{625}{256}$; $u_5 = \dfrac{7776}{3125}$

d) $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

$u_1 = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $u_3 = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$; $u_4 = \dfrac{5}{\sqrt{17}}$; $u_5 = \dfrac{6}{\sqrt{26}}$

Đề 174: Tìm số hạng tổng quát của dãy số sau:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \text{ với } n \ge 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 = 3$

$u_2 = 2.u_1 = 2.3 = 3.2^1$

$u_3 = 2.u_2 = 3.2^2$

$u_4 = 2.u_3 = 3.2^3$

....

$u_n = 3.2^{n-1}$

Chú ý: Học sinh có thể dùng quy nạp để chứng minh công thức tổng quát trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Đề 175: Dãy số (u_n) cho bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$$

a) Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy. Chứng minh dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

b) Chứng minh $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^{n-2}}$ bằng phương pháp quy nạp.

Hướng dẫn giải

a) * $u_1 = 3$; $u_2 = \dfrac{u_1 + 1}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$$u_3 = \frac{u_2 + 1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_4 = \frac{u_3 + 1}{2} = \frac{\frac{3}{2} + 1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$u_5 = \frac{u_4 + 1}{2} = \frac{\frac{5}{4} + 1}{2} = \frac{9}{8}$$

*.Trước hết ta nhận xét:

$u_1 > 1$

$u_2 = \dfrac{u_1 + 1}{2} > \dfrac{1+1}{2} \Rightarrow u_2 > 1$

$u_3 = \dfrac{u_2 + 1}{2} > \dfrac{1+1}{2} \Rightarrow u_3 > 1$

Tổng quát với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$u_n > 1$ (có thể dùng quy nạp để kiểm chứng)

Nghĩa là dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Mặt khác: $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 1}{2} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

Do đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$u_n \le u_1 \Rightarrow u_n \le 3$$

Nghĩa là dãy số (u_n) bị chặn trên.

Tóm lại (u_n) là dãy số giảm và bị chặn.

b) Với $n = 1$; ta có: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 1 + \dfrac{1}{2^{1-2}} = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 1 + \dfrac{1}{2^{1-2}}$

Công thức đúng với $n = 1$ (chú ý: $\dfrac{1}{2^{-1}} = 2$)

* Giả sử với $n = k \ge 1$, ta có:

$$u_k = 1 + \frac{1}{2^{k-2}}$$

$$\Rightarrow \quad u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} = \frac{1 + \dfrac{1}{2^{k-2}} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2^{(k+1)-2}}$$

Nghĩa là công thức đúng với $n = k + 1$

Vậy: $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^{n-2}}$

Đề 176: Xét tính đơn điệu của các dãy số

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}$ b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ c) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

Hướng dẫn giải

a) Nhận xét: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{1}{n^2+1}} = \frac{n^2+1}{n^2+2n+1+1}$$

Rõ ràng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^2+1 < n^2+2n+1+1$

nên: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

Vậy (u_n) là dãy giảm

b) Ta có: $u_n = \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

Do đó: $$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Vậy (u_n) là dãy tăng.

c) Ta có: $$\begin{cases} u_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số không giảm.

Mặt khác $$\begin{cases} u_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ u_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$\Rightarrow u_2 > u_3 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số không tăng.

Vậy: (u_n) là dãy số không tăng, không giảm

Đề 177: Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$ là dãy số tăng? Dãy số giảm?

Hướng dẫn giải

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)a+2}{(n+1)+1} - \frac{na+2}{n+1} = \frac{a-2}{(n+2)(n+1)}$

Vì $(n + 2)(n + 1) > 0$ nên

* Với $a > 2$ thì $u_{n+1} - u_n > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$

$\Leftrightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

* Với $a < 2$ thì $u_{n+1} - u_n < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

Đề 178: Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = \frac{1}{n} + 3$

b) $u_n = \frac{n+3}{n+2}$

c) $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

d) $u_n = (-1)^n(3^n + 2)$

Hướng dẫn giải

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} + 3\right) - \left(\frac{1}{n} + 3\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{(n+1)n} < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

b) Ta có: $u_n = \frac{n+3}{n+2} = 1 + \frac{1}{n+2}$

Do đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+3}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n-2} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)} < 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có: $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2} = 2 - \dfrac{3}{n+2}$

Do đó: $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \left(2 - \frac{3}{n+3}\right) - \left(2 - \frac{3}{n+2}\right)$$

$$= \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

d) Ta có: $u_1 = (-1)^1(3^1 + 2) = -5$

$u_2 = (-1)^2(3^2 + 2) = 11$

$u_3 = (-1)^3(3^3 + 2) = -29$

Do đó: $u_1 < u_2 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số không giảm.

$u_2 > u_3 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số không tăng.

Vậy: (u_n) là dãy số không đơn điệu.

Đề 179: Chứng minh các dãy số (u_n) sau đây bị chặn, biết:

a) $u_n = \dfrac{3n^2 - 2}{n^2 + 1}$ b) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n + 1}$

c) $u_n = \dfrac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ d) $u_n = \dfrac{6n^3 - 2n + 1}{n^3 + 2n}$

Hướng dẫn giải

Ta xét trường hợp $n \in \mathbb{N}^*$:

a) * Ta có: $u_n = \dfrac{3n^2 - 2}{n^2 + 1} = 3 - \dfrac{5}{n^2 + 1}$

$\Rightarrow u_n < 3$

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn trên.

* Mặt khác vì $n \geq 1$ nên: $3n^2 - 2 > 0$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3n^2 - 2}{n^2 + 1} > 0$

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Tóm lại (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Ta có: $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1} \le \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(2n+1)} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad u_n \le \dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn trên.

Mặt khác: $n + (-1)^n \ge 0$ và $2n + 1 > 0$

Do đó: $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1} \ge 0$

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Tóm lại: (u_n) là dãy số bị chặn.

c) * Ta có: $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \ge 0$ (vì $n \in \mathbb{N}^*$)

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới

Mặt khác: $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \le \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} < 1$

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn trên.

Tóm lại (u_n) là dãy số bị chặn.

d) * Ta có: $u_n = \dfrac{6n^3 - 2n + 1}{n^3 + 2n} = \dfrac{2n(3n^2-1)+1}{n^3+2n} > 0$

(vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên: $3n^2 - 1 > 0$)

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới.

* Mặt khác: $u_n = \dfrac{6n^3 - 2n + 1}{n^3 + 2n} = 6 - \dfrac{14n - 1}{n^3 + 2n} < 6$

(Vì $14n - 1 > 0$)

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) bị chặn trên.

Tóm lại dãy số (u_n) bị chặn.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 180. Viết 5 số hạng đầu của dãy số cho bởi công thức:

a) $u_n = 3n^2 + n - 1$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

c) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + n$

d) $u_n = \dfrac{1}{n} - 3$

Đề 181: Dãy số (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \quad \text{với} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

a) Viết 5 số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Đáp số: b) $u_n = n^2$.

Đề 182: Xét tính tăng, giảm của các số (u_n) biết:

a) $u_n = \frac{1}{n} - 2$ b) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

c) $u_n = (-1)^2(2^n + 1)$ d) $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$

e) $u_n = 2n + \cos\frac{1}{n}$

Đáp số: a) giảm b) tăng c) không đơn điệu

d) giảm c) tăng

Đề 183: Trong các dãy số sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn.

a) $u_n = 2n^2 - 1$ b) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$

c) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$ d) $u_n = \sin n + \cos n$

Đáp số: a) Bị chặn dưới, không bị chặn trên

b) Bị chặn

c) Bị chặn

d) Bị chặn

Đề 184: Cho dãy số (u_n) biết:

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \quad \text{với } n \geq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} \quad \text{với } n \geq 1 \end{cases}$

Viết và chứng minh công thức của các dãy số trên.

Đáp số: a) $u_n = \sqrt{n}$ b) $u_n = \frac{1}{n}$

§3. CẤP SỐ CỘNG

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Như vậy, nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d, ta có công thức truy hồi:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + d \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

Để chỉ dãy số (u_n) là cấp số cộng, ta viết $\div (u_n)$ hay $\div\, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots$

II. Số hạng tổng quát

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d \quad (n \geq 2)}$$

Trong đó (u_n) là cấp số cộng có công sai d.

III. Tính chất các số hạng của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n), ta có:

$$\boxed{u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad \text{với} \quad k \geq 2}$$

Đặc biệt: Ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi: $b = \dfrac{a+c}{2}$

Hay $\quad a + c = 2b$

IV. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d.

Đặt: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n$.

Khi đó S_n được gọi là tổng n số hạng đầu của cấp số cộng (u_n).

Ta có: $\boxed{S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}}$

Ngoài ra: vì $u_n = u_1 + (n - 1)d$ nên ta có thể viết:

$$\boxed{S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}}$$

Chú ý:

1. Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta chứng minh: $u_{n+1} - u_n = d$ (với d là hằng số và $n \geq 1$)

   Suy ra: $u_{n+1} = u_n + d$

   Nghĩa là (u_n) là một cấp số cộng có công sai d
2. Khi giải các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp 5 đại lượng: u_1, d, u_n, n, S_n. Cần phải biết ít nhất 3 trong 5 đại lượng đó thì sẽ tính được các đại lượng còn lại.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 185: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Hãy tính số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 5 - 2n$ b) $u_n = \frac{n}{2} - 1$ c) $u_n = 3^n$

d) $u_n = \frac{7 - 3n}{2}$ e) $u_n = \frac{n - 1}{2n + 1}$ f) $u_n = (-1)^n + 3n$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = [5 - 2(n + 1)] - (5 - 2n)$

$$= 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n - 2$$

Vậy (u_n) là một cấp số cộng, có số hạng đầu

$u_1 = 3$ và công sai $d = -2$

b) $u_1 = -\frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{2}$

c) Ta có: $u_1 = 3^1 = 3$

$u_2 = 3^2 = 9$

$u_3 = 3^3 = 27$

Ta có: $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d) $u_1 = 2;\ d = -\dfrac{3}{2}$

e) Không là cấp số cộng.

f) Không là cấp số cộng.

Đề 136: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 9 - 5n$.

a) Chứng minh (u_n) là một cấp số cộng. Tính số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.

b) Tính tổng của một trăm số hạng đầu.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = [9 - 5(n + 1)] - (9 - 5n)$

$$= -5$$

$$\Rightarrow \qquad u_{n+1} = u_n - 5$$

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với:

Số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -5$

b) Ta có: $S_{100} = \dfrac{100[2u_1 + (100 - 1)d]}{2}$

$$= \frac{100[2.4 + 99.(-5)]}{2} = -24350$$

Đề 137: Viết chín số xen giữa các số -3 và 37 để được một cấp số cộng có 11 số hạng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 = -3;\ u_{11} = 37$

Mặt khác: $u_n = u_1 + (n - 1)d$

$$\Rightarrow d = \frac{u_n - u_1}{n - 1} = \frac{37 + 3}{10} = 4$$

Vậy chín số hạng xen giữa cần tìm là:

1; 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33.

Đề 138: Tính tổng: $S_{100} = 1 + 2 + 3 + ... + 100$

Hướng dẫn giải

Ta có: 1, 2, 3, ..., 100 là một cấp số cộng

Có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng cuối $u_{100} = 100$ và $n = 100$. Do đó:

$$S_{100} = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{100(1 + 100)}{2} = 5050$$

Đề 189: Tính tổng: $1 + 2 + 3 + ... + n$.

Hướng dẫn giải

Ta có: 1, 2, 3, ..., n là một cấp số cộng có n số hạng và số hạng đầu $u_1 = 1$; số hạng cuối $u_n = n$

Do đó: $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

$$= \frac{n(1 + n)}{2}$$

Vậy: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$.

Đề 190: Tính tổng: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$

Hướng dẫn giải

Ta có: 1, 3, 5, ... 2n – 1 là một cấp số cộng

Có n số hạng và số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng cuối $u_n = 2n - 1$. Do đó:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

$$= \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[1 + (2n - 1)]}{2} = n^2$$

Vậy: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Đề 191: Tìm công sai của một cấp số cộng hữu hạn, biết số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng cuối $u_{15} = 43$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_{15} = u_1 + 14d$

$$\Rightarrow 43 = 1 + 14d \Rightarrow d = \frac{43 - 1}{14} = 3$$

Vậy công sai $d = 3$

Đề 192: Xác định số hạng đầu và công sai của mỗi cấp số cộng dưới đây, biết:

a) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 6d) - (u_1 + 2d) = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1+2)(u_1+12) = 75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}$$

b) Ta có: $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Đề 193: Tính tổng 10 số hạng đầu của mỗi cấp số cộng dưới đây, biết:

a) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{10} = 50 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $S_{10} = \dfrac{10(u_1 + u_{10})}{2} = \dfrac{10(5 + 50)}{2} = 275$

b) Ta có: $d = u_2 - u_1 = 5 - 1 = 4$.

Mặc khác: $S_{10} = \dfrac{10[2u_1 + 9d]}{2} = \dfrac{10(2 + 36)}{2} = 190$

Đề 194: Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

Hướng dẫn giải

Vì 3 góc của tam giác lập thành cấp số cộng nên ta có thể giả sử 3 góc đó theo thứ tự là:

$x - d; x; x + d$ (với $d \ge 0$).

Ta có: $(x - d) + x + (x + d) = \pi$

$\Rightarrow \quad 3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

Ngoài ra tam giác đã cho là tam giác vuông nên:

$$x + d = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Vậy ba góc cần tìm là: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Đề 195: Một cấp số cộng có 11 số hạng. Tổng các số hạng là 176. Hiệu giữa số hạng cuối và số hạng đầu là 30. Tìm cấp số đó.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} S_{11} = 176 \\ u_{11} - u_1 = 30 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11(2u_1 + 10d)}{2} = 176 \\ (u_1 + 10d) - u_1 = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 10d = 32 \\ 10d = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy cấp số cần tìm là:

1, 4, 7, ..., 31

Đề 196: Bốn số lập thành 1 cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 22. Tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

Hướng dẫn giải

Vì 4 số đã cho lập thành 1 cấp số cộng nên ta có thể giả sử 4 số cần tìm là:

$x - 3d; x - d; x + d; x + 3d$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 22 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 166 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \\ \left(\frac{11}{2} - 3d\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{11}{2} + d\right)^2 + \left(\frac{11}{2} + 3d\right)^2 = 166 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ d = \pm\frac{3}{2} \end{cases}$$

* với $x = \frac{11}{2}$ và $d = \frac{3}{2}$, cấp số cần tìm là: 1; 4; 7; 10.

* với $x = \frac{11}{2}$ và $d = -\frac{3}{2}$, cấp số cần tìm là: 10; 7; 4; 1.

Đề 197: Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, v.v... Hỏi có bao nhiêu hàng?

Hướng dẫn giải

Gọi n là số hàng cây. Khi đó số cây trên các hàng này lần lượt là: 1, 2, 3, ..., n.

Theo giả thiết: $1 + 2 + 3 + ... + n = 3003$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 3003$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -78 \text{ (loại)} \\ n = 77 \quad \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy có: 77 hàng cây.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 198: Trong các cấp số cộng dưới đây, hãy tính số hạng đã chỉ ra:

a) ÷ 1, 5, 9, ... $u_{17} = ?$ b) ÷ $\sqrt{2}$; 2; $3 - \sqrt{2}$; ... $u_{10} = ?$

Đáp số: a) $u_{17} = 65$;

b) $u_{10} = 10 - 8\sqrt{2}$

Đề 199: Trong các dãy số dưới đây, dãy nào là cấp số cộng?

a) $u_n = 2n + 11$ b) $u_n = \dfrac{5n-1}{2}$

c) $u_n = n^2 + 3$ d) $u_n = (-1)^n.n + 3$

Đáp số: a), b) là cấp số cộng.

c), d) không là cấp số cộng.

Đề 200: Viết 6 số xen giữa hai số 3 và 24 để được một cấp số cộng có 8 số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này.

Đáp số: * 6, 9, 12, 15, 18, 21

* $S_8 = 108$.

Đề 201: Viết 5 số hạng xen giữa hai số 25 và 1 để có được 7 số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Tính số hạng thứ 50 của cấp số này.

Đáp số: * 21, 17, 13, 9, 5

* $u_{50} = -171$.

Đề 202: Chứng minh rằng ba số dương a, b, c lập thành 1 cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ lập thành một cấp số cộng.

Đề 203. Tìm m để ba số: $10 - 3m$; $2m^2 + 3$; $7 - 4m$ lập thành 1 cấp số cộng.

Đáp số: $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{11}{4}$

Đề 204: Cho a, b, c lập thành 1 cấp số cộng. Chứng minh:

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$

b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

c) $a^2 + ab + b^2$; $a^2 + ac + c^2$; $b^2 + bc + c^2$ lập thành 1 cấp số cộng.

§4. CẤP SỐ NHÂN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q. Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Như vậy, nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n . q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*}$$

Đặc biệt:

* Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng: $u_1, 0, 0, ..., 0, ...$

* Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng: $u_1, u_1, u_1, ... u_1, ...$

Để chỉ dãy số (u_n) là cấp số nhân, ta viết $\div\div(u_n)$ hay $\div\div\ u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ..$

II. Số hạng tổng quát

$$\boxed{u_n = u_1.q^{n-1} \quad \text{với} \quad n \geq 2}$$

Trong đó (u_n) là cấp số nhân có công bội q.

III. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n). Ta có:

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \quad \text{với } k \geq 2$$

$$\left(\text{hay } |u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}\right)$$

IV. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q.

Đặt: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Khi đó S_n được gọi là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n).

Ta có: $$\boxed{S_n = \frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \quad (q \neq 1)}$$

Nếu q = 1 thì cấp số nhân là $u_1, u_1, \dots u_1$.

Khi đó: $S_n = nu_1$.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 205: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q.

Biết $u_1 = 3$; $u_5 = 48$. Tìm q.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_5 = u_1.\, q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{u_5}{u_1} = \frac{48}{3} = 16$

$\Rightarrow\ q = \pm 2$.

Đề 206: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q.

Biết $q = \frac{2}{3}$ và $u_6 = \frac{160}{243}$. Tìm u_1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_6 = u_1.\, q^5 \Rightarrow u_1 = \frac{u_6}{q^5} = \frac{160}{243} : \frac{2^5}{3^5} = \frac{160.3^5}{243.2^5} = 5$

Vậy: $u_1 = 5$

Đề 207: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$; $q = 2$. Hỏi -1536 là số hạng thứ mấy?

Hướng dẫn giải

Giả sử $u_n = -1536$

Ta có: $u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow -1536 = -3.2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{-1536}{-3} = 512$

$\Rightarrow\ 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$.

Vậy: -1536 là số hạng thứ 10.

Đề 208: Tìm các số hạng của một cấp số nhân gồm 5 số hạng, biết:

a) $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$.

b) $u_4 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết: $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_5 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2 = 3 \\ u_1q^4 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2 = 3 \\ q^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ q = \pm 3 \end{cases}$

* Với q = 3 ta có cấp số nhân: $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27.

* Với q = –3 ta có cấp số nhân: $\frac{1}{3}$; –1; 3; –9; 27.

b) Theo giả thiết: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 25 \\ u_1q^2 - u_1 = 50 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(u_1q^2 - u_1\right)q = 25 \\ u_1q^2 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = -\frac{200}{3} \end{cases}$$

Vậy cấp số nhân cần tìm: $\div -\frac{200}{3}, -\frac{100}{3}; -\frac{50}{3}; -\frac{25}{3}; -\frac{25}{6}$

Đề 209: Tìm cấp số nhân có 6 số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng cuối là 62.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31 & (1) \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow u_1q + u_2q + u_3q + u_4q + u_5q = 62$

$\Leftrightarrow (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)q = 62$ (3)

Từ (1) và (3) ta có: q = 2

Mặt khác cũng theo giả thiết:

$$S_5 = 31 \Leftrightarrow \frac{u_1\left(1 - q^5\right)}{1 - q} = 31$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1.(-31)}{-1} = 31 \Leftrightarrow u_1 = 1$$

Vậy cấp số nhân cần tìm:

$\div$ 1, 2, 4, 8, 16, 32

Đề 210: Trong một cấp số nhân có 9 số hạng, biết $u_1 = 5$ và $u_9 = 1280$. Tính công bội q và tổng S các số hạng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_9 = u_1.q^8 \Rightarrow 1280 = 5.q^8$

$\Rightarrow q^8 = 256$

$\Rightarrow q = \pm 2.$

* Với $q = 2$ ta có: $S_9 = \dfrac{5\left(1-2^9\right)}{1-2} = 2555$

* Với $q = -2$ ta có: $S_9 = \dfrac{5\left[1-(-2)^9\right]}{1-(-2)} = 855.$

Đề 211: Cấp số nhân gồm 4 số hạng, tổng số hạng đầu và số hạng cuối là 27, tích của hai số hạng còn lại là 72. Tìm các số hạng của nó.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1 + u_4 = 27 \\ u_2.u_3 = 72 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^3 = 27 & (1) \\ u_1q.u_1q^2 = 72 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow u_1q^3 = \dfrac{72}{u_1}$. Thay vào (1):

$$u_1 + \frac{72}{u_1} = 27 \Leftrightarrow u_1^2 - 27u_1 + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = 24 \end{array}\right.$$

* Với $u_1 = 3$, từ (1) $\Rightarrow q = 2$.

Cấp số nhân cần tìm: $\div\div$ 3; 6; 12; 24.

* Với $u_1 = 24$; từ (1) $\Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$.

Cấp số nhân cần tìm: $\div\div$ 24; 12; 6; 3.

Đề 212: Tìm bốn góc của một tứ giác, biết rằng các góc lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp chín lần góc thứ hai.

Hướng dẫn giải

Gọi x là góc nhỏ nhất và q ($q \geq 1$) là công bội. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} S_4 = 360 \\ xq^3 = 9xq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\left(1-q^4\right)}{1-q} = 360 \\ q^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\left(1-3^4\right)}{1-3} = 360 \\ q = 3 \quad (\text{vì } q \geq 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ q = 3 \end{cases}$$

Vậy các góc của tứ giác là: 9^0; 27^0; 81^0; 243^0.

Đề 213: Một cấp số nhân có các số hạng là chẵn. Biết rằng tổng của tất cả các số hạng gấp ba lần tổng của các số hạng có thứ tự lẻ. Tìm công bội của cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

Giả sử cấp số nhân có 2n số hạng với số hạng đầu u_1 và công bội q (dễ thấy $q \neq 1$).

Khi đó: $u_1, u_3, u_5, ..., u_{2n-1}$ cũng là 1 cấp số nhân có n số hạng với số hạng đầu là u_1 và công bội là q^2.

Theo giả thiết:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{2n} = 3(u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1\left(1-q^{2n}\right)}{1-q} = 3\frac{u_1\left(1-q^{2n}\right)}{1-q^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - q^2 = 3(1-q) \Leftrightarrow 1 + q = 3 \ (\text{vì } q \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow q = 2.$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 214: Trong các cấp số nhân dưới đây, hãy tìm số hạng u_n đã chỉ ra:

a) $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; ...$ $u_8 = ?$ b) $2; -4; 8; ...$ $u_{11} = ?$

Đáp số: a) $u_8 = \dfrac{1}{2187}$;

b) $u_{11} = 2048$.

Đề 215: Tìm công bội của một cấp số nhân hữu hạn, biết số hạng đầu $u_1 = 2$ và số hạng cuối $u_{11} = 64$.

Đáp số: $q = \pm \sqrt{2}$.

Đề 216: Trong các cấp số nhân dưới đây, tính số hạng đầu và công bội của nó, biết:

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$

Đáp số: a) $u_1 = 12$; $q = 2$

b) $u_1 = -5$; $q = \pm 2$.

Đề 217: Tìm các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng cấp số đó :

a) Có 5 số hạng mà số hạng đầu là 3, số hạng cuối là 243.

b) Có 6 số hạng mà số hạng đầu là 243 và số hạng cuối là 1.

Đáp số: a) ÷÷ 3, 9 , 27, 81, 243 ($q = 3$)

÷÷ 3, –9, 27, –81, 243 ($q = -3$)

b) ÷÷ 243, 81, 27, 9, 1 ($q = \frac{1}{3}$)

Đề 218: Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng. Các số hạng thứ nhất đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của cấp số nhân và cấp số cộng là $\frac{9}{5}$. Tìm hai cấp số ấy.

Đáp số: ÷ 3, 9, 15, ...

... 3, 9, 27, ...

Đề 219: Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành một cấp số nhân. Biết rằng tổng của số hạng đầu và cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. Tìm bốn số đó.

Đáp số: 12, 16, 20, 25.

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

TOÁN TRẮC NGHIỆM

Đề 220:

1. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n + 5$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $u_{n+1} = 2^n + 6$ B. $u_{n+1} = 2^n + 7$

C. $u_{n+1} = 2.2^n + 5$ D. $u_{n+1} = 2.2^n + 6$

2. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_{2n} = \dfrac{2n+3}{n+5}$ B. $u_{2n} = \dfrac{2n^2+1}{n+3}$

C. $u_{2n} = \dfrac{4n^2+1}{2n^2+3}$ D. $u_{2n} = \dfrac{4n+1}{2n+3}$

3. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n+1}{2n}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_6 = \dfrac{6}{32}$ B. $u_6 = \dfrac{7}{32}$ C. $u_6 = \dfrac{7}{12}$ D. $u_6 = \dfrac{7}{128}$

4. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Xét các mệnh đề:

(I) (u_n) là dãy số tăng.

(II) (u_n) là dãy số bị chặn.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (I) đúng, (II) sai. B. (I) sai, (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều đúng D. Cả (I) và (II) đều sai.

5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$. Xét các mệnh đề:

(I) (u_n) là dãy số tăng.

(II) (u_n) là dãy số giảm.

(III) (u_n) là dãy số bị chặn.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) và (III) đúng B. Chỉ (II) và (III) đúng

C. Chỉ (III) đúng D. Cả (I), (II), (III) đều sai.

Đề 221:

1. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng?

A. 1, 5, 8, 11.
B. 2, 5, 8, 12.
C. −1, −4, −7, −10, −12.
D. 0, 0, 0, 0.

2. Cho cấp số cộng ÷ −2; x; 6; y. Hãy chọn kết quả đúng:

A. x = 2; y = 10
B. x = 1; y = 7.
C. x = 2; y = 8
D. x = −6; y = −2.

3. Cho cấp số cộng: ÷ 2; 5; 8; 11; ... Hãy chọn kết quả đúng:

A. $u_{30} = 81$
B. $u_{30} = 92$
C. $u_{30} = 89$
D. $u_{30} = 95$

4. Cho cấp số cộng (u_n). Hệ thức nào sau đây sai?

A. $u_5 + u_7 = 2u_6$
B. $u_5 + u_7 = 2u_1 + 10d$.
C. $u_5 + u_7 = u_4 + u_8$
D. $u_5 + u_7 = u_6 + u_8$

5. Cho cấp số cộng:

÷ −3; 0; 3; 6; 9... Hãy chọn kết quả đúng:

A. $S_{100} = 14700$
B. $S_{100} = 14550$
C. $S_{100} = 14850$
C. $S_{100} = 14750$

Đề 222:

1. Dãy số nào sau đây không là cấp số nhân?

A. 0, 0, 0, 0, 0.
B. 1, 1, 1, 1, 1.
C. 5, 0, 0, 0, 0.
D. 5, 10, 20, 40, 60.

2. Cho cấp số nhân:

∺ $\frac{1}{2}$, −2, 8, x, 128, y. Hãy chọn kết quả đúng:

A. x = −32; y = 512
B. x = −32; y = −512.
C. x = 32; y = 512
D. x = −64; y = −512.

3. Cho cấp số nhân:

∺ 5; $-\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$; $-\frac{5}{8}$, ... Hãy chọn kết quả đúng:

A. $u_{11} = \frac{5}{2^{10}}$
B. $u_{11} = -\frac{5}{2^{10}}$
C. $u_{11} = \frac{5}{2^{11}}$
D. $u_{11} = -\frac{5}{2^{11}}$.

4. Cho cấp số nhân (u_n). Hệ thức nào sau đây sai:

A. $u_8^2 = u_7 . u_9$ B. $S_{12} = \dfrac{u_1\left(1-q^{12}\right)}{1-q}$.

C. $u_{10} = u_7 . q^3$ D. $u_6 = \sqrt{u_5 . u_7}$

5. Cho cấp số nhân:

3; –12; 48; ... Hãy chọn kết quả đúng:

A. $S_8 = 393222$ B. $S_8 = -65535$.

C. $S_8 = -39321$ D. $S_8 = -13107$.

ĐÁP ÁN

Đề 220:

1. C. 2. D. 3. C. 4. B. 5. C.

Đề 221:

1. D. 2. A. 3. C. 4. D. 5. B.

Đề 222:

1. D 2. B. 3. A. 4. D. 5. C.

Chương 4. GIỚI HẠN

* Giới hạn của dãy số
* Giới hạn của hàm số
* Hàm số liên tục

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Khái niệm giới hạn hữu hạn của dãy số

1. *Giới hạn 0*

* *Định nghĩa 1*

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$

Khi dãy số (u_n) có giới hạn là 0, ta nói (u_n) hội tụ về 0.

2. *Một vài giới hạn đặc biệt*

a) $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0; \ \lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0}$

b) $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 \text{ nếu } |q| < 1}$

3. *Giới hạn khác 0*

* *Định nghĩa 2*

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là số a $(a \neq 0)$ khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - a) = 0$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$

Nhận xét: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c = c \text{ với } c \text{ là hằng số.}}$

Chú ý: Từ đây, thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, ta viết tắt: $\lim u_n = a$.

II. Một số định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số

* *Định lí 1.*

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

a) $\lim (u_n + v_n) = a + b$.

b) $\lim (u_n - v_n) = a - b$.

c) $\lim u_n . v_n = a. b$.

d) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$)

e) $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ (nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$)

* *Định lí 2.*

Nếu ba dãy số (u_n), (v_n), (b_n) thỏa mãn hai điều kiện:

1) $u_n \leq b_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $\lim u_n = \lim v_n = a$

thì: $\lim b_n = a$.

* *Định lí 3.* (Định lí Vai – σ – xtrát (Weierstrass))

Mọi dãy số tăng và bị chặn trên đều có giới hạn.

Mọi dãy số giảm và bị chặn dưới đều có giới hạn.

Chú ý: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Người ta chứng minh được rằng (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn trên. Do đó nó có giới hạn. Giới hạn này được kí hiệu là e và gọi là hằng số Ơ – le.

Như vậy $\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$

Một giá trị gần đúng của e là:

$e \approx 2,7182818284590 45$.

III. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

* Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

* Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó:

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Giới hạn này được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) và được kí hiệu là:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Vậy $\boxed{S = \frac{u_1}{1-q}.}$

IV. Giới hạn ± ∞

1. *Định nghĩa 3.*

* Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi n dần tới dương vô cực nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

* Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét:

Ta có: $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

2. ***Một vài giới hạn đặc biệt***

* *Định lí 4*

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$

B/ GIẢI TOÁN

Đề 223: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{5\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$.

Chứng minh $\lim u_n = 5$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim(u_n - 5) = \lim\left(\frac{5\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} - 5\right)$

$$= \lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Vậy: $\lim u_n = 5$.

Chú ý: Về sau để tính $\lim u_n$ ta làm như sau:

$$\lim u_n = \lim \frac{5\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} = \lim\left(5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim 5 + \lim\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= 5 + 0 = 5$$

Đề 224: Tính: $\lim \dfrac{3\sqrt{n}-5}{2\sqrt{n}}$

Ta có: $$\lim \frac{3\sqrt{n}-5}{2\sqrt{n}} = \lim\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}.\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \lim\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}.0 = \frac{3}{2}$$

Đề 225: Tìm: $\lim \dfrac{1}{n^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $$\lim\frac{1}{n^2} = \lim\frac{1}{n}.\frac{1}{n} = \lim\frac{1}{n}.\lim\frac{1}{n} = 0.0 = 0$$

Chú ý: Tổng quát ta có: với $k \in \mathbb{N}^*$, thì

$$\boxed{\lim\frac{1}{n^k} = 0}$$

Ta có thể xem đây là công thức để giải toán cho nhanh.

Đề 226: Tìm các giới hạn

a) $\lim\dfrac{5n^2+3n}{n^2-3}$ b) $\lim\dfrac{7n^2-3n^2+1}{2n^3+n}$

Hướng dẫn giải

a) Chia tử số và mẫu số cho n^2, ta có:

$$\lim\frac{5n^2+3n}{n^2-3} = \lim\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim 5 + 3.\lim\frac{1}{n}}{\lim 1 - 3.\lim\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{5+3.0}{1-3.0} = 5$$

b) Ta có: $\lim\frac{7n^3-3n^2+1}{2n^3+n}=\lim\frac{7-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}}$

$$=\frac{7-3.0+0}{2+0}=\frac{7}{2}$$

Đề 227: Tìm giới hạn: $\lim\left(n^2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3-2n}{n^3-2}\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\left(n^2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3-2n}{n^3-2}\right)$

$$=\lim\frac{n^3+1}{n}.\frac{3-2n}{n^3-2}=\lim\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n}.\frac{n\left(\frac{3}{n}-2\right)}{n^3\left(1-\frac{2}{n^3}\right)}$$

$$=\lim\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\frac{\frac{3}{n}-2}{1-\frac{2}{n^3}}=(1+0)\frac{0-2}{1-0}=-2$$

Đề 228: Tìm giới hạn

a) $\lim\frac{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{3n^2+1}}{n+3}$ b) $\lim\frac{\sqrt{n^3+2n}}{n^2-1}$

Hướng dẫn giải

a) Chia tử và mẫu cho n ta được:

$$\lim\frac{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{3n^2+1}}{n+3}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{3}{n}}=\frac{\sqrt{1-0}+\sqrt{3+0}}{1+0}$$

$$=1+\sqrt{3}$$

b) Chia tử và mẫu cho n^2 ta được:

$$\lim\frac{\sqrt{n^3+2n}}{n^2-1}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{0+0}}{1-0}=0$$

Đề 229: Tìm giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$ b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+2}$ c) $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$

Hướng dẫn giải

a) Chia tử số và mẫu số cho $\sqrt{n}$ ta được:

$$\lim \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1$$

b) Chia tử số và mẫu số cho n ta được:

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+2} = \lim \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt[3]{1+0}}{1+0} = 1$$

c) $\lim(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Đề 230: Tìm giới hạn:

a) $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$

b) $\lim(n-\sqrt[3]{n^3+2n^2}$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

Hướng dẫn giải

a) $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

$$= \lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

$$= \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim(n - \sqrt[3]{n^3+2n^2})$

$$= \lim \frac{\left(n-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}\right)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}}$$

$$= \lim \frac{-2n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+\sqrt{(n^3+2n^2)^2}}$$

$$= \lim \frac{-2}{1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}} = -\frac{2}{3}$$

c) $\lim(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}) = \lim\left[\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)+\left(n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)\right]$

$$= \lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) + \lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$$

$$= A + B$$

Với:

$$* \ A = \lim(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$$

$$* \ B = \lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+1}\right) = \lim \frac{\left(n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt[3]{(n^3+1)^2}\right)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt[3]{(n^3+1)^2}}$$

$$= \lim \frac{-1}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt[3]{(n^3+1)^2}} = 0$$

Vậy: $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right) = 0$

Chú ý:

1. $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$.
2. $\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}\right) = A - B$
3. $\left(A-\sqrt[3]{B}\right)\left(A^2+A\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B^2}\right) = A^3 - B$

Đề 231: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{\cos(\sqrt{n}.\pi)}{n}$ b) $\lim \dfrac{\sin n + \cos n}{5n+1}$

Hướng dẫn giải

a) Vì $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\cos(\sqrt{n}.\pi)}{n} \le \dfrac{1}{n}$

và $\lim \dfrac{-1}{n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

nên $\lim \dfrac{\cos(\sqrt{n}.\pi)}{n} = 0$

(Áp dụng định lí 2)

b) Ta có: $|\sin n + \cos n| \le |\sin n| + |\cos n| \le 2$

Do đó: $\dfrac{-2}{5n+1} \le \dfrac{\sin n + \cos n}{5n+1} \le \dfrac{2}{5n+1}$

Mặt khác vì: $\lim \dfrac{-2}{5n+1} = \lim \dfrac{2}{5n+1} = 0$

nên $\lim \dfrac{\sin n + \cos n}{5n+1} = 0$

Chú ý: Ta có thể dùng:

$$\sin n + \cos n = \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow |\sin n + \cos n| \le \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{5n+1} \le \frac{\sin n + \cos n}{5n+1} \le \frac{\sqrt{2}}{5n+1}$$

Đề 232: Tìm giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{3^n + 5.4^n}{2^n - 3.4^n}$ b) $\lim \dfrac{5^n + 7^{n+1}}{3^{n+1} + 7^n}$

Hướng dẫn giải

a) Chia tử số và mẫu số cho 4^n, ta được:

$$\lim \frac{3^n + 5.4^n}{2^n - 3.4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5}{\left(\frac{2}{4}\right)^n - 3} = \frac{0+5}{0-3} = -\frac{5}{3}$$

b) Chia tử số và mẫu số cho 7^n, ta được:

$$\lim \frac{5^n + 7^{n+1}}{3^{n+1} + 7^n} = \lim \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n + 7}{3.\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1} = \frac{0 + 7}{3.0 + 1} = 7$$

Đề 233: Tìm các giới hạn

a) $\lim \frac{5n - 3}{n.2^n}$ b) $\lim \frac{4n^4 + n}{n^2 + 1}$

c) $\lim(n^2 + 2n - 1)$ d) $\lim(-n^3 + n + 3)$

Hướng dẫn giải

a) $\lim \frac{5n - 3}{n.2^n} = \lim \frac{5 - \frac{3}{n}}{2^n} = 0$

vì $\lim\left(5 - \frac{3}{n}\right) = 5$ và $\lim 2^n = +\infty$

b) $\lim \frac{4n^4 + n}{n^2 + 1} = \lim \frac{4 + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = +\infty$

vì $\lim\left(4 + \frac{1}{n^3}\right) = 4 > 0$; $\lim\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) = 0$

và $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} > 0$ với mọi n.

c) $\lim(n^2 + 2n - 1) = \lim n^2\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$

vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 > 0$

d) $\lim(-n^3 + n + 3) = \lim\left[-n\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)\right]$

Vì $\lim n\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

nên $\lim\left[-n\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)\right] = -\infty$

Vậy: $\lim(-n^3 + n + 3) = -\infty$

Đề 234: Tìm giới hạn: $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1).n}\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

....

$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

Do đó: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1).n}=1-\frac{1}{n}$.

Vậy: $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1).n}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 235: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3n+2}{n-7}$

Chứng minh $\lim u_n = 3$.

Đề 236: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\frac{5n\sqrt{n}-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+3}$ b) $\lim\frac{\sqrt{n}+1}{n^2\sqrt{n}+2}$

Đáp số: a) 5 b) 0

Đề 237: Tìm các giới hạn

a) $\lim\frac{5n^4-3n^2+1}{2n^4+n-3}$ b) $\lim\frac{-n^3+2n^2+n}{n^3-1}$

Đáp số: a) $\frac{5}{2}$ b) -1

Đề 238: Tìm các giới hạn

a) $\lim\frac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)}$ b) $\lim\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n^2+5n-1)(3n+4)}$

Đáp số: a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{6}$

Đề 239: Tìm giới hạn: $\lim\frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

Đáp số: $\frac{1}{2}$

Đề 240: Tìm các giới hạn

a) $\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{5n^2-1}}{n-3}$ b) $\lim\frac{\sqrt[3]{2n^3+n}+\sqrt[3]{5n^3+1}}{n+1}$

Đáp số: a) $1+\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}$

Đề 241: Tìm các giới hạn

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+1}-n\right)$ b) $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n-1}-2n\right)$

Đáp số: a) 1 b) $\frac{3}{4}$

Đề 242: Tìm các giới hạn

a) $\lim\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+2}$ b) $\lim\frac{\sin 2n+\cos 2n}{n^2+2n}$

Đáp số: a) 0 b) 0

Đề 243: Tìm các giới hạn

a) $\lim\frac{1+2^n}{1-2^n}$ b) $\lim\frac{3^n-5^n}{3^n+5^n}$ c) $\lim\frac{5^{n+1}+3^n-2^n}{2.5^n-4^n}$

Đáp số: a) -1 b) -1 c) $\frac{5}{2}$

Đề 244: Tìm các giới hạn

a) $\lim\frac{6n^2+3n-1}{n^2.5^n}$ b) $\lim\frac{5n^3-3n+1}{1-n^2}$

c) $\lim(2n^4+n^2+1)$ d) $\lim(-5n^3-n+5)$

e) $\lim\frac{n^3+2n-1}{n^4+4n^2+2}$ f) $\lim\frac{-2n^3+n}{n^5+n^4-1}$

Đáp số: a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) 0 f) 0

Đề 245: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 0,33 ... 3$ (n chữ số 3 sau dấu phẩy)

a) Chứng minh rằng (u_n) hội tụ bằng cách chứng minh nó là dãy số tăng và bị chặn trên.

b) Tìm $\lim u_n$

Đáp số: b) $\frac{1}{3}$

Đề 246: Tìm giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

Đáp số: $\frac{1}{2}$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

1. *Định nghĩa*

* *Định nghĩa 1.*

Cho khoảng K; $x_0 \in K$ và hàm số f(x) xác định trên K (hoặc $K \setminus \{x_0\}$)

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và (x_n) hội tụ về x_0, thì dãy số tương ứng $(f(x_n))$ hội tụ về L.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Nhận xét: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0;\ \lim\limits_{x\to x_0} c = c \quad \text{với} \quad c \text{ là hằng số}}$

2. *Một số định lí cơ bản*

a) Định lí

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$. Khi đó

* $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$

* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = L.M$

* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)

* $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ (nếu $f(x) \geq 0$ trong một khoảng nào đó chứa x_0)

Định lí 2.

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và ba hàm số f(x), u(x) và v(x).

Nếu $u(x) \le f(x) \le v(x)$ với mọi $x \in K\setminus\{x_0\}$ và nếu

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} v(x) = L$$

thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

3. *Giới hạn một bên*

* *Định nghĩa 2*

a) Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số f(x) khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và (x_n) hội tụ về x_0 thì dãy số tương ứng $f(x_n)$ hội tụ về L.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$

b) Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số f(x) khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và (x_n) hội tụ về x_0 thì dãy số tương ứng (f(x)) hội tụ về L.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$

Định lí 3.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

4. *Giới hạn hữu hạn của hàm số tại ±∞*

* *Định nghĩa 3.*

a) Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số f(x) có giới hạn là số L khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì dãy số tương ứng $(f(x_n))$ hội tụ về L.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

b) Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng $(-\infty, a)$

Ta nói hàm số f(x) có giới hạn là số L khi x dần tới âm vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ thì dãy số tương ứng $(f(x_n))$ hội tụ về L.

Kí hiệu: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

Nhận xét: $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} c = c; \ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x} = 0 \text{ với c là hằng số}}$

Chú ý: Các định lí trình bày trong mục I về giới hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

III. Giới hạn ±∞ của hàm số

1. *Giới hạn vô cực*

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hay $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự định nghĩa 1, 2 hay định nghĩa 3 đã biết trong các phần trước.

Nhận xét: $\boxed{f(x) \text{ có giới hạn } +\infty \Leftrightarrow -f(x) \text{ có giới hạn } -\infty}$

2. *Một vài giới hạn đặc biệt*

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên, dương

c) * $\lim_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ

* $\lim_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn

3. *Một vài quy tắc về giới hạn ±∞*

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích f(x).g(x)

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} f(x).g(x)$
$\pm\infty$	$L > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$L < 0$	$\mp\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

* Trường hợp $g(x) > 0$ khi $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$+\infty$	0
$L > 0$	0	$+\infty$
$L < 0$		$-\infty$

* Trường hợp $g(x) < 0$ khi $x \to x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$-\infty$	0
$L > 0$	0	$-\infty$
$L < 0$		$+\infty$

IV. Các dạng vô định

Khi tìm giới hạn, ta có thể gặp bốn loại giới hạn sau đây mà ta gọi là các dạng vô định.

a) Dạng $\dfrac{0}{0}$

Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

b) Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

c) Dạng $0.\infty$

Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x)$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

d) Dạng $\infty - \infty$

Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Hay $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

Chú ý: Khi $x \to x_0^+$; $x \to x_0^-$; $x \to +\infty$ hay $x \to -\infty$ ta cũng thường gặp các dạng vô định tương tự như trên.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 247: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$

Hướng dẫn giải

Hàm số f(x) xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq 3$ và $x_n \to 3$.

Ta có: $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2 - 9}{x_n - 3} = \lim \dfrac{(x_n - 3)(x_n + 3)}{x_n - 3}$

$= \lim(x_n + 3) = 6$

Vậy: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$

Đề 248: Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 5} x$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x + 2)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (5x - 7)$

d) $\lim\limits_{x \to 4} (x + 3)(x - 2)$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x + 5}{x - 2}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x + 7}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x \to 5} x = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x + 2) = \lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 2 = 3 + 2 = 5$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (5x - 7) = \lim\limits_{x \to 1} 5x - \lim\limits_{x \to 1} 7$

$= \lim\limits_{x \to 1} 5 . \lim\limits_{x \to 1} x - 7$

$= 5 .7 - 7 = 28$

d) $\lim\limits_{x \to 4} (x + 3)(x - 2) = \lim\limits_{x \to 4} (x + 3) . \lim\limits_{x \to 4} (x - 2)$

$= \left(\lim\limits_{x \to 4} x + \lim\limits_{x \to 4} 3\right)\left(\lim\limits_{x \to 4} x - \lim\limits_{x \to 4} 2\right)$

$= (4 + 3)(4 - 2) = 24$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x + 5}{x - 2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 4}(x + 5)}{\lim\limits_{x \to 4}(x - 2)}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to 4} x + \lim\limits_{x \to 4} 5}{\lim\limits_{x \to 4} x - \lim\limits_{x \to 4} 2} = \dfrac{4 + 5}{4 - 2} = \dfrac{9}{2}$

f) Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} (x + 7) = \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 7 = 2 + 7 = 9$

Vậy: $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x + 7} = \sqrt{9} = 3$

Nhận xét: Nếu f(x) xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$ thì:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ví dụ: $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 5x - 1}{2x + 3} = \dfrac{3.2^2 + 5.2 - 1}{2.2 + 3} = \dfrac{21}{7} = 3$

Đề 249: Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{1}{x}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $-x^2 \le x^2 \sin \dfrac{1}{x} \le x^2$ với mọi $x \ne 0$

và $\lim_{x \to 0} (-x^2) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

nên: $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$

b) Ta có: $-x^4 \le x^4 \cos \dfrac{1}{x} \le x^4$ với mọi $x \ne 0$

và: $\lim_{x \to 0} (-x^4) = \lim_{x \to 0} x^4 = 0$

nên: $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{1}{x} = 0$

Đề 250: Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1 & \text{nếu } x \ge 2 \\ 3x + 7 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x + 7) = 3.1 + 7 = 10$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x^2 + 3x - 1) = 2.3^2 + 3.3 - 1 = 26$

c) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x^2 + 3x - 1) = 2.2^2 + 3.2 - 1 = 13$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x + 7) = 3.2 + 7 = 13$

Vì $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 13$

nên: $\lim_{x \to 2} f(x) = 13.$

Đề 251: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 4 \text{ nếu } x \geq 1 \\ 1 - 2x^2 \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$$

Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(1 - 2x^2) = 1 - 2.0^2 = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(5x + 4) = 5.2 + 4 = 14$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1 - 2x^2) = 1 - 2.1^2 = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(5x = 4) = 5.1 + 4 = 9$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại

Đề 252: Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^2 + 2x}{x^2 + 1}$

Hướng dẫn giải

a) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2 + 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5 + \frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} 5 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to +\infty} 1 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{5 + 0}{1 + 0} = 5$$

b) Tương tự $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^2 + 2x}{x^2 + 1} = 5.$

Đề 253: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^3 + x + 2}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x - 2}{x^4 + x^2 - 1}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^3+x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\dfrac{0-0}{2+0+0}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x^4+x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}=\dfrac{0-0}{1+0-0}=0$

Đề 254: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2+1}{2x^4+x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x}{x^5-2x^2+1}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2+1}{2x^4+x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x}{x^5-2x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}}=\dfrac{0}{1}=0$

Đề 255: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-2x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(1-\dfrac{2}{x^2})=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(1-\dfrac{2}{x^2})=-\infty$

Đề 256: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-4x^2+3)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-4x^2+3)$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-4x^2+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4(1-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^4})=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-4x^2+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4(1-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^4})=+\infty$

Đề 257: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{5x+2}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5x+2}{x-3}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{5x+2}{x-3} = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to 3^-}(5x+2) = 17 > 0;$ $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-3) = 0$

và $x - 3 < 0$ khi $x \to 3^-$

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5x+2}{x-3} = +\infty$

vì $\lim\limits_{x\to 3^+}(5x+2) = 17 > 0;$ $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3) = 0$

và $x - 3 > 0$ khi $x \to 3^+$

Đề 258: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x+2}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x+2}{x-3}$

Hướng dẫn giải

a) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{5x+2}{x-3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{5+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = \frac{5}{1} = 5$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x+2}{x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = \frac{5}{1} = 5$$

Đề 259: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-1}{x-2}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-1}{x-2} = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+x-1) = 5 > 0;$ $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2) = 0$

và $x - 2 < 0$ khi $x \to 2^-$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-1}{x-2} = +\infty$

vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+x-1) = 5 > 0$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$

và $x-2>0$ khi $x\to 2^+$

Đề 260: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x-2}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\right) = +\infty$

Đề 261: Xác định dạng vô định và tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-1) = 2$$

b) Dạng $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+3x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(-1)+1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

Đề 262: Xác định dạng vô định và tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-a^4}{x-a}$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$$

b) Dạng $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x+a)(x^2+a^2)=(a+a)(a^2+a^2)=4a^3$$

Đề 263: Xác định dạng vô định và tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{4}{3}$$

b) Dạng $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to2}\frac{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(-2-x)(\sqrt{x+7}+3)=-24$$

Đề 264: Xác định dạng vô định và tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-(x^2+x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{-0}{\sqrt{0+1}+\sqrt{0^2+0+1}}=0$$

b) Dạng $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\frac{(2+1)(\sqrt{9}+3)}{4(2+\sqrt{4})}=\frac{9}{8}$$

Đề 265: Xác định dạng vô định và tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+1}{x^3+x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-x}}{2-3x}$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+1}{x^3+x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{4}{1}=4$$

b) Dạng $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-x}}{2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{2-3x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}-3}=\frac{-\sqrt{2}}{-3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Đề 266: Xác định dạng vô định và tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}+2x)$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x+2)-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+5}{(x-2)(x+2)}=+\infty$$

b) Dạng $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(4x^2-x)-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4}$$

Đề 267: Xác định dạng vô định và tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\ldots+x^n)\right]$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $0.\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}.\frac{-x}{x+1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=-1$$

b) Dạng $0.\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\ldots+x^n)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}.\frac{1-(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1-x)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}.\frac{1-(1-x^{n+1})}{1-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}.\frac{x^{n+1}}{1-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1-x}=\frac{0}{1}=0$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 268: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x+2\cos x}{x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin 3x+\cos 3x}{x+1}$

Đáp số: a) 0 b) 0

Đề 269: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2x + 5 \text{ nếu } x < 2 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \text{ nếu } x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \text{ nếu } x > 3 \end{cases}$

Đáp số: a) 9 b) Không tồn tại

Đề 270: Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} \text{ nếu } x < 1 \\ ax + 2 \text{ nếu } x \geq 1 \end{cases}$

Tìm a để $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tồn tại

Đáp số: a = 1

Đề 271: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{\sqrt{9 + x} - 3} & \text{nếu } x < 0 \\ 2x + a & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$

Tìm a để $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tồn tại

Đáp số: a = 24

Đề 272: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{x^4 + 1}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^5 + 2x - 3}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x + 1}{4x^2 - x}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4 + 4x^2 - 1}{2x^4 - x^2 + 3}$

Đáp số: a) 0 b) 0 c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$

Đề 273: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} (5x^3 - 3x^2 + x - 1)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (5x^3 - 3x^2 + x - 1)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4 - 4x^2 + 3)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^4 - 4x^2 + 3)$

Đáp số: a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$

Đề 274: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x^2-1)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3+x^2-1)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{1}{4}x^4+x^2+1)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{4}x^4+x^2+1)$

Đáp số: a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$

Đề 275: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x+1}{3x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+1}{3x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{3x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x-6}$

Đáp số: a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

Đề 276: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{-2x^2+3x+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{-2x^2+3x+1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+3x+1}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x+1}{x-3}$

Đáp số: a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$

Đề 277: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2-9}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-4x^2+x+2}{x^2-3x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$

Đáp số: a) $-\frac{1}{6}$ b) 1 c) 4 d) $\frac{m}{n}$

Đề 278: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$ d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}}$

Đáp số: a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{4}{3}$

Đề 279: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x^2+1)^3(1-2x)^{94}}{2x^{100}+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+5x})$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

Đáp số: a) -2^{93} b) $-\dfrac{5}{2}$ c) -1

Đề 280: Tìm giới hạn của các hàm số sau khi $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}$

b) $f(x)=x+\sqrt{x^2-x+1}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}$

Đáp số: a) $1; -1$ b) $+\infty; \dfrac{1}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}$

Đề 281: Tìm giới hạn của các hàm số sau khi $x\to+\infty$

a) $f(x)=\dfrac{x^2\sin 2x+x^2\cos 2x}{3x^4+1}$ b) $f(x)=\dfrac{2x+\sin^2 x-5\cos 2x}{x^2+3}$

Đáp số: a) 0 b) 0

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Hàm số liên tục tại một điểm

* *Định nghĩa 1*

Hàm số f(x) xác định trên khoảng K được gọi là liên tục tại điểm $x_0\in K$ nếu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

II. Hàm số liên tục trên một khoảng

* *Định nghĩa 2*

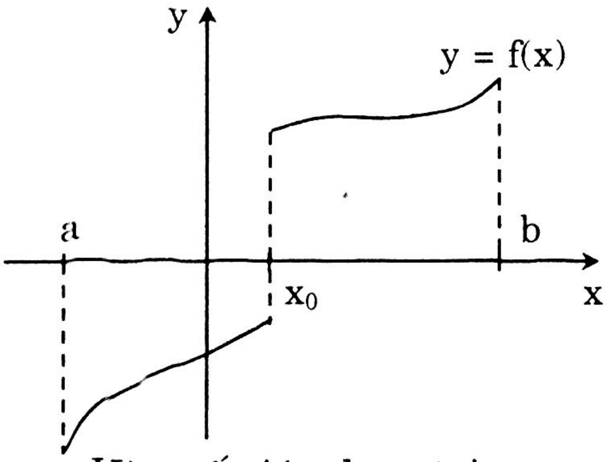
a) Hàm số f(x) được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

b) Hàm số f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a,b] nếu nó liên tục trên khoảng (a,b) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

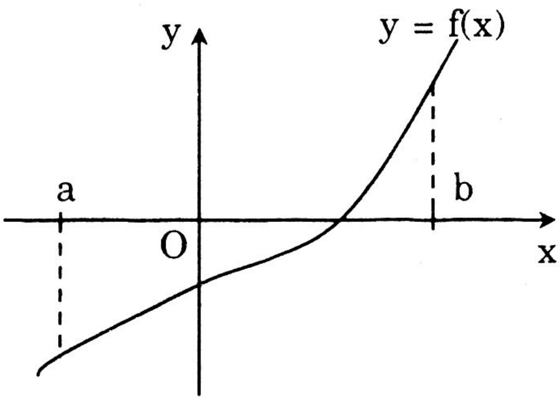
Tính liên tục của hàm số trên nửa khoảng, như (a,b]; [a, +∞),... được định nghĩa một cách tương tự.

Nhận xét

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.



Hàm số gián đoạn tại x_0



Hàm số liên tục trên (a, b)

III. Một số định lí cơ bản

1. *Định lí 1.*

a) Các hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

2. *Định lí 2.*

Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số liên tục trên khoảng K. Khi đó:

a) Các hàm số f(x) + g(x); f(x) – g(x) và f(x).g(x) cũng liên tục trên K.

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên K, nếu $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in K$

c) Hàm số $\sqrt{f(x)}$ liên tục trên K, nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$

3. *Định lí 3.*

Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b] và f(a).f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

* Áp dụng: Định lí này thường dùng để chứng minh phương trình có nghiệm trong một khoảng. Do đó định lí 3 có thể phát biểu dưới dạng khác như sau:

* Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] và f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng (a, b).

B/ GIẢI TOÁN

Đề 282: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có:

* $f(1) = 2$

* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

* Do đó: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Vậy hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 1$

Đề 283: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{nếu } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 0$

Hướng dẫn giải

Ta có:

* $f(0) = 2.0 + 1 = 1$

* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2x + 3) = 3$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại

Vậy f(x) không liên tục tại điểm $x_o = 0$

Đề 284: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_o = 2$

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x - 2}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số f(x) không xác định tại $x_o = 2$, nghĩa là f(2) không tồn tại

Vậy f(x) không liên tục tại điểm $x_o = 2$

b) Ta có:

* f(2) = 5

* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x - 1) = 1$

* Do đó: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

Vậy: f(x) không liên tục tại điểm $x_o = 2$

Đề 285: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Xác định a để hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_o = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có:

* f(1) = a

* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 3$

Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_o = 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow \quad a = 3$

Vậy a = 3 là giá trị cần tìm.

Đề 286: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2x + 4 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

trên tập xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Tập xác định của hàm số f(x) là: $D = \mathbb{R}$

* Trên khoảng $(-\infty; 1)$, $f(x) = 2x + 4$ là hàm đa thức nên liên tục.

* Trên khoảng $(1; +\infty)$; $f(x) = x^3 + x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục.

* Tại $x_0 = 1$

Ta có: $f(1) = 1^3 + 1 + 1 = 3$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 4) = 6 \neq f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 + x + 1) = 3 = f(1)$$

Vì $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ nên $\lim_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại

Vậy f(x) không liên tục tại điểm $x_0 = 1$

Tóm lại f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và trên $[1 ; +\infty)$ nhưng gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

Đề 287: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 4 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$$

trên tập xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Tập xác định của hàm số f(x) là: $D = \mathbb{R}$

* Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

Vì f(x) là thương của 2 đa thức, đồng thời mẫu số $x - 3 \neq 0, \forall x \neq 3$ nên f(x) liên tục trên các khoảng $(-\infty ; 3)$ và $(3 ; +\infty)$

* Tại x = 3. Ta có:

$f(3) = 4$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 1) = 4$$

Do đó: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Nghĩa là f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Tóm lại hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đề 288: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{nếu } x < 0 \\ x + a & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

Định a để hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

* Trên khoảng $(-\infty, 0)$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục.

* Trên nửa khoảng $[0, +\infty)$, $f(x) = x + a$ là hàm đa thức nên liên tục.

Do đó: f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Xét tại điểm $x_0 = 0$. Ta có:

$$f(0) = 0 + a = a$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + a) = a$$

f(x) liên tục tại $x_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

Tóm lại: a = 1 là giá trị cần tìm.

Đề 289: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 3 & \text{nếu } x = 1 \\ 7x - 4 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của f(x) tại điểm:

a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = 1$

Hướng dẫn giải

a) Trên khoảng $(-\infty; 1)$, $f(x) = x^2 + 3x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục.

Mặt khác $x_0 = 0 \in (-\infty\ ; 1)$ nên f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

b) Tại $x_0 = 1$, ta có:

$$f(1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 3x - 1) = 1^2 + 3.1 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (7x - 4) = 7.1 - 4 = 3$$

Vì $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

nên f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 1$

Đề 290: Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3x^2 + 5x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng (0,1).

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$.

f(x) là hàm đa thức nên liên tục trên đoạn [0,1]

Mặt khác: $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 8 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(0).f(1) = -8 < 0$$

Vậy phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm trên khoảng (0,1).

Đề 291: Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên khoảng (–1 ; 1).

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$

Vì f(x) là hàm đa thức nên liên tục trên các đoạn [–1 ; 0] và [0, 1].

Ngoài ra: $\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(0) = -3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f(-1).f(0) = -12 < 0$$

nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_1 \in (-1, 0)$

và: $\begin{cases} f(0) = -3 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f(0).f(1) = -6 < 0$$

nên phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_2 \in (0, 1)$

Rõ ràng $x_1 \neq x_2$.

Tóm lại phương trình f(x) = 0 có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên khoảng (–1;1).

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 293: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 6 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 3$

Đáp số: Liên tục.

Đề 294: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{nếu } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{nếu } x > -1 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = -1$

Đáp số: Không liên tục.

Đề 295: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 5$:

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + \sqrt{x+1}}{x - 5}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{nếu } x \neq 5 \\ 9 & \text{nếu } x = 5 \end{cases}$

Đáp số: a) Không liên tục

b) Không liên tục.

Đề 296: Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} & \text{nếu } x \neq \pm 2 \\ k & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số f(x).

b) Tìm k để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Đáp số: a) Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) $k = \dfrac{1}{16}$

Đề 297: Xét tính liên tục của hàm số:

$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 5 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 4x - 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Đáp số: f(x) liên tục trên $(-\infty; 0]$ và $(0; +\infty)$. Gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

Đề 298: Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 2 & \text{nếu } x = 2 \end{cases} \quad \text{trên tập xác định của nó.}$$

Đáp số: f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đề 299: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{nếu } x \leq 2 \\ 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ với a là hằng số.

Tìm a để hàm số trên liên tục với mọi x, khi đó hãy vẽ đồ thị của hàm số.

Đáp số: $a = \dfrac{3}{4}$. Học sinh tự vẽ hình.

Đề 300: Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đề 301: Chứng minh rằng phương trình cosx = x có nghiệm.

Đề 302: Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng (–2; 5).

ÔN TẬP CHƯƠNG 4

TOÁN TRẮC NGHIỆM

Đề 303:

1. Cho $A = \lim \dfrac{2n + 1}{n + 3}$; $B = \lim \dfrac{4n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3}$; $C = \lim \dfrac{10n^3 - n^2 + 1}{5n^3 + 2n}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ A = B　　B. Chỉ A = C

C. Chỉ B = C　　D. A = B = C.

2. Cho $A = \lim \dfrac{n + 3}{n^2}$; $B = \lim \dfrac{n^3 + 2n^2}{n^3 - 2n + 1}$; $C = \lim \dfrac{n^4 + 1}{n^5 - 3}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ A = B　　B. Chỉ A = C

C. Chỉ B = C　　D. A = B = C.

3. Cho $A = \lim \dfrac{\sqrt{n^2 + 2n - 1} + \sqrt{4n^2 - 1}}{n + 5}$

Kết quả nào sau đây đúng?

A. $A = 3$ B. $A = 5$ C. $A = 0$ D. $A = +\infty$.

4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 4} - n$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n = 0$ B. $\lim u_n = 1$ C. $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$ D. $\lim u_n = \dfrac{1}{4}$

5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{7^{n+1} - 3^{n+2}}{4^n - 2.7^n}$

Kết quả nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n = \dfrac{7}{4}$ B. $\lim u_n = \dfrac{7}{2}$

C. $\lim u_n = -\dfrac{7}{2}$ D. $\lim u_n = -\dfrac{1}{2}$

Đề 304:

1. Cho $A = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; $B = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $C = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

Xét các mệnh đề:

(I). $B = 2A$ (II). $C = 3A$.

Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. (I) đúng, (II) sai B. (I) sai, (II) đúng

C. Cả (I) và (II) đều đúng D. Cả (I) và (II) đều sai.

2. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{nếu } x \ge 1 \\ 2x - 3 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3$ B. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -1$

C. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$ D. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ không tồn tại.

3. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + x - 1 & \text{nếu } x > 2 \\ 3x + 11 & \text{nếu } x \le 2 \end{cases}$$

Xét các mệnh đề:

(I). $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0^4 + 0 - 1 = -1$

(II). $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3.3 + 11 = 20$

(III). $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 17$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (III) đúng.
B. Chỉ (I) và (II) đúng.
C. Cả (I), (II), (III) đều đúng.
D. Cả (I), (II), (III) đều sai.

4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$

Xét các mệnh đề:

(I). $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
(II). $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (I) đúng, (II) sai.
B. (I) sai, (II) đúng.
C. Cả (I) và (II) đều đúng.
D. Cả (I) và (II) đều sai.

5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

Xét các mệnh đề:

(I). $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$
(II). $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
(III). $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) và (II) đúng.
B. Chỉ (III) đúng.
C. Cả (I), (II), (III) đều đúng.
D. Cả (I), (II), (III) đều sai.

Đề 205:

1. Cho hàm số $f(x) = x^5 - 4x^2 + 1$.

Xét các mệnh đề:

(I). f(x) liên tục trên đoạn $[-3; 1]$.

(II). f(x) liên tục trên khoảng $(-3; 1)$.

(III). f(x) liên tục trên nửa khoảng $[-3; 1)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (III) đúng. D. Cả (I), (II), (III) đều đúng.

2. Cho hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}.$$

Xét các mệnh đề:

(I). f(x) liên tục trên khoảng (0; 5).

(II). f(x) liên tục trên khoảng (–3; 0).

(III). f(x) liên tục trên đoạn [1; 3].

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) và (II) đúng. B. Chỉ (I) và (III) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng. D. Cả (I), (II) và (III) đều đúng.

3. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \\ 3x - 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Xét các mệnh đề:

(I). f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

(II). f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

(III). f(x) liên tục tại điểm $x_0 = -2$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) và (II) đúng. B. Chỉ (I) và (III) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng. D. Cả (I), (II) và (III) đều đúng.

4. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{nếu } x \geq 2 \\ 3 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Xác định a để f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. a = 3 B. a = 5 C. a = –3 D. a = –5

5. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x + a^2 & \text{nếu } x > 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \\ 3x - a & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Xác định a để f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = \pm 1$

B. $a = -1$

C. $a = 1$

D. Không tồn tại a

ĐÁP ÁN

Đề 303:

1. D 2. B 3. A 4. B 5. C

Đề 304:

1. C 2. D 3. A 4. C 5. C

Đề 305:

1. D 2. B 3. B 4. D 5. C

Chương 5. ĐẠO HÀM

- Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm
- Quy tắc tính đạo hàm
- Đạo hàm của hàm số hữu tỉ và hàm số lượng giác
- Vi phân
- Đạo hàm cấp cao

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Đạo hàm tại một điểm

1. *Định nghĩa đạo hàm tại một điểm*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và kí hiệu $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Đặt $\Delta x = x - x_0$ ta có $x = x_0 + \Delta x$ và $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Do đó ta có thể viết:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Quy tắc tính đạo hàm của hàm số tại một điểm

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của x_0, tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. *Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số*

Định lí 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chú ý

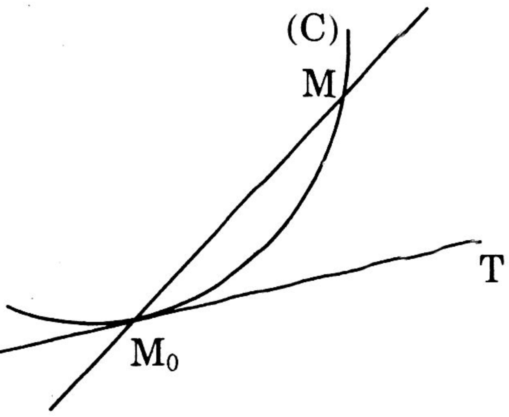
Mệnh đề đảo không đúng.

Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

Chẳng hạn, hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại $x_0 = 0$, nhưng nó không có đạo hàm tại điểm đó.

4. *Ý nghĩa hình học của đạo hàm*

a) Tiếp tuyến của đường cong phẳng



Cho đường cong phẳng (C) và một điểm cố định M_0 trên (C). Kí hiệu M là một điểm di chuyển trên (C). Đường thẳng M_0M là một cát tuyến của (C).

Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T khi điểm M di chuyển trên (C) và dần tới điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại M_0.

Điểm M_0 được gọi là tiếp điểm.

Sau đây, ta không xét trường hợp tiếp tuyến song song hoặc trùng với Oy.

b) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a; b) và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị hàm số đó.

Định lí 2: Đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Như vậy nếu gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ thì $\boxed{k = f'(x_0)}$

c) Phương trình tiếp tuyến

Định lí 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

5. *Ý nghĩa vật lí*

a) Vận tốc tức thời

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $s = f(t)$, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 chính là $f'(t_0)$.

b) Cường độ tức thời

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t, $Q = Q(t)$.

Cường độ trung bình của dòng điện trong thời gian Δt là $I_{tb} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Giới hạn $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ (nếu có) được gọi là cường độ tức thời tại thời điểm t.

Vậy cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t là $Q'(t)$.

II. Đạo hàm trên một khoảng

Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 306: Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$, biết rằng:

a) $x_0 = 1$ và $\Delta x = 1$;   b) $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0,1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= f(1 + 1) - f(1) = f(2) - f(1) = 2^3 - 1^3 = 7$

Vậy $\Delta y = 7$

b) Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= f(1 - 0,1) - f(1) = f(0,9) - f(1) = (0,9)^3 - 1^3 = -0,271$

Vậy $\Delta y = -0,271$

Đề 307: Tính Δy, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx:

a) $y = 2x - 5$;   b) $y = x^2 + 2$.

Hướng dẫn giải

a) $y = f(x) = 2x - 5$

$* \ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= [2(x + \Delta x) - 5] - (2x - 5) = 2x + 2\Delta x - 5 - 2x + 5 = 2\Delta x$

$* \ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

b) $y = f(x) = x^2 + 2$

$* \ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= [(x + \Delta x)^2 + 2] - (x^2 + 2) = x^2 = 2x\Delta x + \Delta^2 x + 2 - x^2 - 2$

$= 2x\Delta x + \Delta^2 x = \Delta x(2x + \Delta x)$

$* \ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

Đề 308: Tính Δy, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx:

a) $y = 2x^3$; b) $y = \sin x$.

Hướng dẫn giải

a) $y = f(x) = 2x^3$

$* \ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2 x + \Delta^3 x) - 2x^3$

$= \Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta^2 x)$

$* \ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta^2 x$

b) $y = f(x) = \sin x$

$* \ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right).\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

$$* \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$$

Đề 309: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số sau:

$$y = x^2 + 3x \quad \text{tại} \quad x_0 = 1.$$

Hướng dẫn giải

$y = f(x) = x^2 + 3x$

* Cho $x_0 = 1$ một số gia Δx. Ta có:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 3(1 + \Delta x) - (1^2 + 3.1) = \Delta^2 x + 5\Delta x$

* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 5$

* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 5) = 5$

Vậy: $f'(1) = 5$

Đề 310: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số sau:

$$y = -\frac{3}{x} \quad \text{tại} \quad x_0 = 2.$$

Hướng dẫn giải

$y = f(x) = -\dfrac{3}{x}$

* Cho $x_0 = 2$ một số gia Δx. Ta có:

$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = -\dfrac{3}{2 + \Delta x} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$

* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{2(2 + \Delta x)}$

* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3}{2(2 + \Delta x)} = \dfrac{3}{4}$

Vậy: $f'(2) = \dfrac{3}{4}$

Đề 311: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số sau:

$$y = \frac{x + 1}{x - 1} \quad \text{tại} \quad x_0 = 0.$$

Hướng dẫn giải

$y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

* Cho $x_0 = 0$ một số gia Δx. Ta có:

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = \frac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} + 1 = \frac{2\Delta x}{\Delta x - 1}$$

* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{\Delta x - 1}$

* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2}{\Delta x - 1} = -2$

Vậy: $f'(0) = -2$.

Đề 312: Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm x = 0. Tại x = 2 hàm số có đạo hàm hay không?

Hướng dẫn giải

* Trước hết ta chứng minh f(x) không liên tục tại x = 0.

Thật vậy ta có: $f(0) = (0-1)^2 = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-x^2) = 0 \neq f(0)$$

Vậy f(x) không liên tục tại x = 0, suy ra f(x) không có đạo hàm tại x = 0.

* Tại x = 2. Ta có: $\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2)$

$$= (2 + \Delta x - 1)^2 - (2-1)^2$$

$$= (\Delta x + 1)^2 - 1 = \Delta^2 x + 2\Delta x + 1 - 1 = \Delta x(\Delta x + 2)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \Delta x + 2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2) = 2$$

Vậy tại x = 2 hàm số có đạo hàm và $f'(2) = 2$

Đề 313: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$ (C).

a) Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số trên tại x = 1

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm A(1; –2).

Hướng dẫn giải

a) Với Δx là số gia của x = 1, ta có:

$$\Delta y = \frac{(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x)}{1+\Delta x - 2} - \frac{1+1}{1-2}$$

$$= \frac{1 + 2\Delta x + \Delta^2 x + 1 + \Delta x}{\Delta x - 1} + 2$$

$$= \frac{2 + 3\Delta x + \Delta^2 x + 2\Delta x - 2}{\Delta x - 1} = \frac{5\Delta x + \Delta^2 x}{\Delta x - 1}.$$

* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5+\Delta x}{\Delta x - 1}$.

* $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{5+\Delta x}{\Delta x - 1} = -5$

Vậy f'(1) = 5

b) Phương trình tiếp tuyến với (C) tại A(2; –1) là:

$y - y_A = f'(x_A)(x - x_A) \Leftrightarrow$ **$y + 2 = -5(x - 1)$ hay $y = -5x + 3$.**

Đề 314: Cho đường cong $y = x^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong đó:

a) Tại điểm (–1; –1);

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^3$ tại điểm $x = x_0$ bất kì.

Với Δx là số gia của x_0 ta có:

* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$

$= x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta^2 x + \Delta^3 x - x_0^3$

$= \Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta^2 x)$

* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta^2 x$

* $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta^2 x) = 3x_0^2$

Vậy $f'(x_0) = 3x_0^2$

a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm (–1; –1) có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Với $x_0 = -1$; $y_0 = -1$; $f'(x_0) = f'(-1) = 3$

b) Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Với $x_0 = 2$; $y_0 = x_0^3 = 8$; $f'(x_0) = f'(2) = 12$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y - 8 = 12(x - 2)$ hay $y = 12x - 16$

c) Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M là: $k = f'(x_0)$.

Mặt khác theo giả thiết k = 3 nên: $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

* Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = f(x_0) = 1^3 = 1$ nên phương trình tiếp tuyến là:

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \text{hay} \quad y = 3x - 2.$$

* Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = f(x_0) = (-1)^3 = -1$ nên phương trình tiếp tuyến là:

$$y + 1 = 3(x + 1) \quad \text{hay} \quad y = 3x + 2.$$

Tóm lại có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = 3x - 2$ và $y = 3x + 2$.

Đề 315: Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$.

a) Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$;

b) Tại điểm có tung độ bằng –1;

c) Biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x + 4y - 4 = 0$;

d) Biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $x - y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm $x = x_0$ bất kì.

Với Δx là số gia của x_0, ta có:

* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0}$

* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{(x_0 + \Delta x)x_0}$

* $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$

Vậy: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Với $x_0 = \frac{1}{2}$; $y_0 = 2$; $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ hay } y = -4x + 4.$$

b) Tiếp tuyến tại điểm có tung độ bằng -1 có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Với: $y_0 = -1 \Rightarrow \frac{1}{x_0} = -1 \Rightarrow x_0 = -1$

Khi đó: $f'(x_0) = f'(-1) = -1$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y + 1 = -1(x + 1)$ hay $y = -x - 2$.

c) Δ_1: $x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$

Δ_1 có hệ số góc $k_1 = -\frac{1}{4}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là:

$$k = f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Theo giả thiết tiếp tuyến song song với Δ_1 nên:

$$k = k_1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$$

* Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = \frac{1}{2}$ và $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \quad \text{hay} \quad y = -\frac{1}{4}x + 1$$

Tiếp tuyến này loại vì trùng với Δ_1

* Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = -\frac{1}{2}$ và $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x + 2) \text{ hay } y = -\frac{1}{4}x - 1$$

Tóm lại phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{4}x - 1$

d) Δ_2: $x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$

Δ_2 có hệ số góc $k_2 = 1$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là: $k = f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Theo giả thiết tiếp tuyến vuông góc với Δ_2 nên:

$$k.k_2 = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2}.1 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

* Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$ và $f'(x_0) = -1$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm:

$$y - 1 = -1(x - 1) \text{ hay } y = -x + 2.$$

* Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = -1$ và $f'(x_0) = -1$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm:

$$y + 1 = -1(x + 1) \text{ hay } y = -x - 2.$$

Tóm lại có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là:

$$y = -x + 2 \text{ và } y = -x - 2.$$

Đề 316: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9{,}8m/s^2$ là gia tốc trọng trường (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ $t = 5$ đến $t + \Delta t$, biết rằng $\Delta t = 0{,}1$; $\Delta t = 0{,}05$; $\Delta t = 0{,}001$

b) Tìm vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 5$.

Hướng dẫn giải

a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ $t = 5$ đến $t = 5 + \Delta t$ là: $V_{tb} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Trong đó: $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$

$$= \frac{1}{2}g(5 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}g5^2$$

$$= \frac{1}{2}g(25 + 10\Delta t + \Delta^2 t - 25)$$

$$= \frac{1}{2}g.\Delta t(10 + \Delta t)$$

Do đó: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}g(10 + \Delta t) = \frac{9,8}{2}(10 + \Delta t)$

* Với $\Delta t = 0,1s$ thì: $V_{tb} = 49,49$ m/s

* Với $\Delta t = 0,04s$ thì: $V_{tb} = 49,245$ m/s

* Với $\Delta t = 0,001s$ thì: $V_{tb} = 49,005$ m/s

b) Vận tốc tức thời tại thời điểm t = 5 là:

$$s'(5) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{9,8}{2}(10 + \Delta t) = 49$$

Vận tốc tức thời cần tìm: 49 m/s.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 317:

1. Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 1$ biết rằng $x_0 = 1$ và $\Delta x = 1$ là:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5.

2. Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 1$ tương ứng với sự biến thiên của đối số từ $x_0 = 1$ đến $x_0 + \Delta x = 0,9$ là:

a) –0,1 b) 0,1 c) –0,19 d) 0,19.

Đề 318:

1. Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số f(x) = cosx theo x và Δx là:

a) $\dfrac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$; b) $\dfrac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$

c) $-\dfrac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$; d) $-\dfrac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$.

2. Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ theo x và Δx là:

a) $\frac{-2}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$;   b) $\frac{2}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$

c) $\frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$;   d) $\frac{1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$.

Đề 319:

1. Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại (C) tại điểm $M \in (C)$ với $x_M = 2$ là:

a) 15   b) 9   c) 6   d) 3.

2. Cho đường cong (C): $y = x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M(−1; 1) là:

a) $y = -2x + 1$ b) $y = 2x + 1$

c) $y = -2x - 1$ d) $y = 2x - 1$.

Đề 320:

1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ là:

a) $y + y_0 = f'(x_0)(x + x_0)$ b) $y + y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

c) $y - y_0 = f'(x_0)(x + x_0)$ d) $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

2. Cho chuyển động thẳng s = f(t). Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là:

a) $f(t_0)$ b) $f'(t_0)$ c) $f(t_0) + f'(t_0)$ d) $f(t_0) - f'(t_0)$.

Đề 321:

1. Trên đường cong (C): $y = 4x^2 - 6x + 1$ hãy tìm điểm tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 2x.

a) (1; 3)   b) (2; 5)   c) (0; 1)   d) (−1; 11).

2. Cho chuyển động thẳng có phương trình $s = 2t^2 + t$ (s tính bằng m, t tính bằng giây). Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t = 3 là:

a) 12 m/s   b) 13 m/s   c) 14 m/s   d) 15 m/s.

D/ HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề 317:

1. Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [(1 + 1)^2 - 1] - (1^2 - 1) = 3 - 0 = 3.$

   Đáp số: Chọn b.

2. Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [(0,9)^2 - 1] - (1^2 - 1) = -0,19.$

   Đáp số: Chọn c.

Đề 318:

1. Ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}$$

   Do đó: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right).\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$

   Đáp số: Chọn c.

2. Ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= \frac{x + \Delta x + 1}{x + \Delta x - 1} - \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{-2\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$$

   Do đó: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{-2}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$

   Đáp số: Chọn a.

Đề 319:

1. Hệ số góc cần tìm là: $k = f'(2)$

   Ta có: $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2)$

$$= [(2 + \Delta x)^3 - 3(2 + \Delta x)] - (2^3 - 3.2)$$

$$= 8 + 12\Delta x + 6\Delta^2 x + \Delta^3 x - 6 - 3\Delta x - 8 + 6$$

$$= 9\Delta x + 6\Delta^2 x + \Delta^3 x.$$

   Do đó: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 9 + 6\Delta x + \Delta^2 x$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(9 + 6\Delta x + \Delta^2 x) = 9$$

   Vậy: $f'(2) = 9$

   Suy ra: $k = 9$

   Đáp số: Chọn b.

2. Rõ ràng $M(-1; 1) \in (C)$ nên phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Với: $x_0 = -1; y_0 = 1$ và $f'(x_0) = f'(-1)$

* Ta tính $f'(-1)$:

Ta có: $\Delta y = f(-1 + \Delta x) - f(-1)$

$$= (-1 + \Delta x)^2 - (-1)^2 = 1 - 2\Delta x + \Delta^2 x - 1 = -2\Delta x + \Delta^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 + \Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(-2 + \Delta x) = -2$$

$$\Rightarrow f'(-1) = -2$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm:

$$y - 1 = -2(x + 1) \text{ hay: } y = -2x - 1$$

Đáp số: Chọn c

Đề 320:

1. Theo lí thuyết: Chọn d
2. Theo lí thuyết: Chọn b

Đề 321:

1. Dùng định nghĩa ta tính được $y' = 8x - 6$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Từ giả thiết và ý nghĩa hình học đạo hàm ta suy ra:

$$y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 8x_0 - 6 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 3$. Vậy điểm cần tìm (1; 3).

Đáp số: Chọn a.

2. Ta tính được $s' = 4t + 1$.

Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là:

$$s'(3) = 4.3 + 1 = 13 \text{ (m/s)}.$$

Đáp số: Chọn b.

§2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

1. *Định lí 1*

Hàm số $y = x^n$ ($n \in N$, $n > 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in R$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$

Nhận xét.

Đạo hàm của hàm hằng bằng 0 và đạo hàm của hàm $y = x$ bằng 1.

* $(c)' = 0$, c là hằng số;

* $(x)' = 1$

2. *Định lí 2*

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ bằng $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ với mọi $x > 0$. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

II. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

1. *Định lí 3*

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là những hàm số có đạo hàm tại x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v(x) \neq 0$$

2. *Hệ quả*

a) Nếu k là một hằng số thì

$$(ku)' = ku'.$$

b) Nếu u, v, w là các hàm số có đạo hàm tại x thì

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

c) Nếu v là hàm số có đạo hàm và $v(x) \neq 0$ thì

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{v'}{v^2}$$

III. Đạo hàm của hàm hợp

1. *Định lí 4*

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm u'_x và hàm số $y = y(u)$ có đạo hàm y'_u thì hàm số hợp $y = y[u(x)]$ có đạo hàm theo x là $y'_x = y'_u . u'_x$

2. *Bảng tóm tắt*

STT	Đạo hàm	Đạo hàm của hàm số hợp (với $u = u(x)$)
1	$c = 0$, c là hằng số	
2	$x' = 1$	
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in N, n > 1)$	$(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$ $(n \in N, n > 1)$
4	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

B/ GIẢI TOÁN

Đề 322: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 4x^3 + 2x + 5$ b) $y = x^7 - x^6 + 5x^3$

Hướng dẫn giải

a) $y = x^4 - 4x^3 + 2x + 5 \Rightarrow y' = 4x^3 - 12x^2 + 2$

b) $y = x^7 - x^6 + 5x^3 \Rightarrow y' = 7x^6 - 6x^5 + 15x^2$

Đề 323: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+5}{x-3}$ b) $y = \frac{2x^2+3x+5}{x-1}$

Hướng dẫn giải

a) $y = \frac{x+5}{x-3} \Rightarrow y' = \frac{(x+5)'(x-3)-(x+5)(x-3)'}{(x-3)^2}$

$$= \frac{(x-3)-(x-5)}{(x-3)^2} = -\frac{8}{(x-3)^2}$$

b) $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 5}{x - 1}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(2x^2 + 3x + 5)'(x - 1) - (2x^2 + 3x + 5)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 8}{(x - 1)^2}$$

Đề 324: Cho $f(x) = x^2 + 3x + 4$. Tính f'(2)

Hướng dẫn giải

$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(2) = 7$

Đề 325: Cho $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$. Tính f'(4).

Hướng dẫn giải

$$f'(x) = \frac{(2x + 5)'(x - 3) - (2x + 5)(x - 3)'}{(x - 3)^2} = \frac{2(x - 3) - (2x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{11}{(x - 3)^2}$$

$\Rightarrow f'(4) = -11$

Đề 326: Cho $f(x)\ \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Tính f'(1).

Hướng dẫn giải

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)'(x + 1) - (x^2 + x + 1)(x + 1)'}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x + 1)(x + 1) - (x^2 + x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

$\Rightarrow f'(1) = \dfrac{3}{4}$

Đề 327: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x}\,(x^2 - 1)$ b) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}$

Hướng dẫn giải

a) $y = \sqrt{x}\,(x^2 - 1) \Rightarrow y' = (\sqrt{x})'(x^2 - 1) + \sqrt{x}\,(x^2 - 1)'$

$$= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} = \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$

b) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{(x^3 - 3x^2 + 5x + 1)'}{2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}}$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 5}{2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}}$$

Đề 328: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)$ b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$

Hướng dẫn giải

a) $y = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1) = x - \sqrt{x} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{(\sqrt{x})'(x + 1) - \sqrt{x}(x + 1)'}{(x + 1)^2}$

$$= \frac{\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x + 1)^2} = \frac{x + 1 - 2x}{2\sqrt{x}(x + 1)^2} = \frac{1 - x}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$$

Đề 329: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^7 + x)^2$ b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

Hướng dẫn giải

a) $y = (x^7 + x)^2 \Rightarrow y' = 2(x^7 + x)(x^7 + x)' = 2(x^7 + x)(7x^6 + 1)$

b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2) \Rightarrow y' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(5 - 3x^2)'$

$$y' = 2x(5-3x^2) + (x^2 + 1)(-6x) = 4x(1 - 3x^2)$$

Đề 330: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ b) $y = \dfrac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$

Hướng dẫn giải

a) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \left(\dfrac{2x}{x^2 - 1}\right)' = \dfrac{(2x)'\left(x^2 - 1\right) - 2x\left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

$$y' = \frac{2\left(x^2 - 1\right) - 2x.2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

b) $y = \dfrac{5x-3}{x^2+x+1} \Rightarrow y = \dfrac{(5x-3)'(x^2+x+1)-(5x-3)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$

$$y' = \frac{5(x^2+x+1)-(5x-3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Đề 331: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$

b) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$

c) $y = (m + \dfrac{n}{x^2})^3$ m, n là hằng số).

Hướng dẫn giải

a) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$

$\Rightarrow y' = [x(2x - 1)(3x + 2)]'$

$y' = (x)'(2x - 1)(3x + 2) + x(2x - 1)'(3x + 2) + x(2x - 1)(3x + 2)'$

$y' = (2x - 1)(3x + 2) + 2x(3x + 2) + x(2x - 1).3$

$y' = 2(9x^2 + x - 1)$

b) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$

$\Rightarrow y' = (x + 1)'(x + 2)^2(x + 3)^3 + (x + 1)[(x + 2)^2]'(x + 3)^3 + (x + 1)(x + 2)^2$
$[(x + 3)^3]'$

$y' = (x + 2)^2(x + 3)^3 + (x + 1).2.(x + 2)(x + 3)^3 + (x + 1)(x + 2)^2.3.(x + 3)^3$

$y' = 2(x + 2)(x + 3)^2(3x^2 + 11x + 9)$

c) $y = \left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^3 \Rightarrow y' = 3.\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^2\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)' = -\dfrac{6n}{x^3}\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^2$

Đề 332: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$. Tính f'(3).

Hướng dẫn giải

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Vậy: $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Đề 333: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Tính f'(–4).

Hướng dẫn giải

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Vậy: $f'(-4) = -\frac{1}{(-4)^2} = -\frac{1}{16}$

Đề 334: Cho hàm số $f(x) = \frac{10}{x^2 + 3x}$. Tính $f'(2)$.

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 3x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{10\left(x^2 + 3x\right)'}{\left(x^2 + 3x\right)^2} = -\frac{10(2x + 3)}{\left(x^2 + 3x\right)^2}$$

Vậy: $f'(2) = -\frac{10(4 + 3)}{(4 + 6)^2} = -\frac{7}{10}$

Đề 335: Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để

a) $y' > 0$ b) $y' < 3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

a) $y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$

b) $y' < 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

Đề 336: Tìm đạo hàm của các hàm số: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{(ax + b)'(cx + d) - (ax + b)(cx + d)'}{(cx + d)^2}$$

$$= \frac{a(cx + d) - (ax + b)c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

Vậy: $\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Đề 337: Tìm đạo hàm của các hàm số: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \Rightarrow y' = \frac{\left(ax^2 + bx + c\right)'(dx + e) - \left(ax^2 + bx + c\right)(dx + e)'}{(dx + e)^2}$$

$$= \frac{(2ax + b)(dx + e) - \left(ax^2 + bx + c\right)d}{(dx + e)^2}$$

$$= \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$$

Vậy: $\left(\dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}\right)' = \dfrac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 338:

1. Đạo hàm của hàm số $y = 7 + x - x^2$ tại $x_0 = 1$ là:

a) -1; b) 7; c) 1; d) 3.

2. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ và $g(x) = x^2 + 2x - 3$. Khi đó tập nghiệm của phương trình $f'(x) = g'(x)$ là:

a) $\{1; -3\}$ b) $\{-1; 3\}$; c) $\{1; 3\}$; d) $\{-1; -3\}$

Đề 339:

1. Tìm đạo hàm của hàm số: $y = a^5 + 5at^2 - 2t^3$ (a là hằng số). Đáp số là:

a) $y' = 5a+4 + 10at - 6t^2$ b) $y' = 5a^4 + 5t^2$

c) $y' = 5a^4 + 10at$ d) $y' = 10at - 6t^2$

2. Cho hàm số: $y = -x^3 + mx^2 - 3x$. Tìm m để phương trình $y = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

a) $-3 \le m \le 3$; b) $-3 < m < 3$

c) $m \le -3$ hoặc $m \ge 3$; d) $m < -3$ hoặc $m > 3$.

Đề 340:

1. Cho hàm số: $y = -x^3 + (3 - m)x^2 - 2mx + 3$. Tìm m để $y' \le 0$, $\forall x \in R$.

a) $m \le 6 - 3\sqrt{3}$ hoặc $m \ge 6 + 3\sqrt{3}$.

b) $m < 6 - 3\sqrt{3}$ hoặc $m > 6 + 3\sqrt{3}$.

c) $6 - 3\sqrt{3} \le m \le 6 + 3\sqrt{3}$.

d) $6 - 3\sqrt{3} < m < 6 + 3\sqrt{3}$.

2. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là:

a) $(-1; 0) \cup (1; +\infty;$ b) $[-1; 0] \cup [1; +\infty]$

c) $(-\infty; -1) \cup (0; 1);$ d) $[-\infty; -1] \cup [0; 1].$

Đề 341:

1. Cho hàm số: $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{3x + 1}$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 1$ là:

a) $\left\{\dfrac{2}{3}; 0\right\}$; b) $\varnothing$; c) $\left\{-\dfrac{2}{3}; 0\right\}$; d) $\left\{-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right\}$.

2. Tìm đạo hàm của hàm số: $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$. Đáp số là:

a) $y' = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; b) $y' = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

c) $y' = \dfrac{x^2 - x + 1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$; d) $y' = \dfrac{x^2 + x + 1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$.

Đề 342:

1. Cho $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$. Khi đó $f'(-1)$ bằng:

a) -4; b) -5; c) -6; d) -7.

2. Cho $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$; $g(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ là:

a) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty);$ b) $(0; 1)$;

c) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty);$ d) $[0; 1].$

Đề 343:

1. Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại x thuộc khoảng xác định. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

a) $(u + v)' = u' + v'$;

b) $(uv)' = u'v + uv'$;

c) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (với $v(x) \neq 0$)

d) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}$.

2. Cho S là diện tích của hình tròn bán kính r. Khi đó S'(r) là:

a) Đường kính của hình tròn; b) Chu vi của đường tròn;

c) Bán kính của hình tròn; d) Cả a), b), c) đều sai.

Đề 344:

1. Cho V là thể tích của hình cầu bán kính R. Khi đó V'(R) là:

a) Diện tích hình tròn lớn ; b) Diện tích bán cầu ;

c) Diện tích mặt cầu ; d) Cả a), b), c) đều sai.

2. Tìm đạo hàm của hàm số: $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số)

a) $y' = \dfrac{3a^2x^2 - 2x^4}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$; b) $y' = \dfrac{a^2x^2 - x^4}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$;

c) $y' = \dfrac{a^2x^2 - x^4}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$; d) $y' = \dfrac{3a^2x^2 - 2x^4}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

3. Cho hàm số: $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ là:

a $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; b) $\{-2; 2\}$; c) $\varnothing$; d) $\{\sqrt{2}\}$.

D/ HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề 338:

1. Ta có: $y = 7 + x - x^2 \Rightarrow y' = 1 - 2x \Rightarrow y'(1) = -1$

Đáp số: Chọn a.

2. Ta có: $f'(x) = x^2 - 1$; $g'(x) = 2x + 2$

Do đó: $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f'(x) = g'(x)$ là: $\{-1; 3\}$.

Đáp số: Chọn b.

Đề 339:

1. $y = a^5 + 5at^2 - 2t^3 \Rightarrow y' = 10at - 6t^2$

Đáp số: Chọn d.

2. $y = -x^3 + mx^2 - 3x \Rightarrow y' = -3x^2 + 2mx - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2mx - 3 = 0$$

$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 9 \Leftrightarrow m < -3$ hoặc $m > 3$.

Đáp số: Chọn d.

Đề 340:

1. $y = -x^3 + (3 - m)x^2 - 2mx + 3$

$y' = -3x^2 + 2(3 - m)x - 2m$

$$y' \le 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow (3 - m)^2 - 6m \le 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 12m + 9 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3\sqrt{3} \le m \le 6 + 3\sqrt{3}.$$

Đáp số: Chọn c.

2. $y = x^4 - 2x^2 + 5$

$y' = 4x^3 - 4x$

$y' \ge 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x \ge 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) \ge 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y' \ge 0$ là: $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

Đáp số: Chọn b.

Đề 341:

1. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{3x + 1}$ $(x \ne \dfrac{1}{3})$

$$y = \frac{3x^2 + 2x}{(3x + 1)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\dfrac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ là: $\{-\dfrac{2}{3}; 0\}$.

Đáp số: Chọn c.

2. $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$

$$y' = (x-2)'\sqrt{x^2+1} + (x-2)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{(x-2)\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Đáp số: Chọn a.

Đề 342:

1. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2(x^2)'}{x^4} - \frac{3.\left(x^3\right)'}{x^6} = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$$

$f'(-1) = -1 + 4 - 9 = -6$

Đáp số: Chọn c).

2. Ta có: $f'(x) = 6x^2 - 2x$

$g'(x) = 3x^2 + x$

$f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Đáp số: Chọn a.

Đề 343:

1. Ta có: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ Do đó: d) sai

Đáp số: Chọn d.

2. S là diện tích của hình tròn bán kính r nên:

$S(r) = \pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 2\pi r$.

Vậy S'(r) là chu vi của đường tròn tương ứng.

Đáp số: Chọn b.

Đề 344:

1. V là thể tích của hình cầu bán kính R nên:

$$V(R) = \frac{4}{3}\pi.R^3 \Rightarrow V'(R) = 4\pi R^2$$

Vậy: V'(R) là diện tích của mặt cầu tương ứng.

Đáp số: Chọn c.

2. $$y' = \frac{\left(x^3\right)'\sqrt{a^2 - x^2} - x^3\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{3x^2\sqrt{a^2 - x^2} - x^3.\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{3x^2\left(a^2 - x^2\right) + x^4}{\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{3a^2x^2 - 2x^4}{\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Đáp số: Chọn a.

3. $$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Đáp số: Chọn d.

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ VÀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Đạo hàm của hàm số hữu tỉ

1. Hàm số hữu tỉ

Giả sử P(x) và Q(x) là các đa thức của x. Hàm số dạng $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ được gọi là hàm số hữu tỉ. Hàm số này xác định với mọi x tại đó $Q(x) \neq 0$.

2. Đạo hàm của hàm số hữu tỉ

Giả sử hàm số hữu tỉ $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ xác định trên tập $D = \{x \mid Q(x) \neq 0\}$.

Áp dụng công thức tính đạo hàm của một thương, ta có

$$\boxed{y' = \frac{P'(x).Q(x) - P(x).Q'(x)}{Q^2(x)} \quad (x \in D)}$$

Hệ quả 1.

$$y' = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}, \quad \left(x \neq -\frac{d}{c}\right).$$

Hệ quả 2.

$$y' = \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}, \left(x \neq -\frac{e}{d}\right)$$

II. Đạo hàm của hàm số lượng giác

1. Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

Định lí: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. Bảng đạo hàm của hàm số lượng giác

STT	Đạo hàm	Đạo hàm của hàm số hợp
1	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
2	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
3	$(\operatorname{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$(\operatorname{tg}u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$
4		
5	$(\operatorname{cotg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$	$(\operatorname{cotg}u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \operatorname{cotg}^2 u)$

B/ GIẢI TOÁN

Đề 345: Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x+5}{x-3}$; b) $y = \dfrac{3x^2+4x+1}{2x+4}$;

Hướng dẫn giải

a) $y = \dfrac{x+5}{x-3}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy miền xác định: $D = R \setminus \{3\}$.

b) **Đáp số:** Miền xác định: $D = R \setminus \{-2\}$.

Đề 346: Tìm miền xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x^4+3x^2+4}{1-x^2+x^4}$; b) $y = \dfrac{x^2+x+4}{(x-1)(x^2-5x+6)}$

Hướng dẫn giải

a) **Đáp số:** Miền xác định: $D = R$.

b) **Đáp số:** Miền xác định: $D = R\setminus\{1; 2; 3\}$.

Đề 347: Tìm đạo hàm của hàm số:

$$y = \frac{-x^2+2x+3}{x^3-2}.$$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{\left(-x^2+2x+3\right)'\left(x^3-2\right)-\left(-x^2+2x+3\right)\left(x^3-2\right)'}{\left(x^3-2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-2x+2\right)\left(x^3-2\right)-\left(-x^2+2x+3\right).3x^2}{\left(x^3-2\right)^2}$$

$$= \frac{-2x^4+2x^3+4x-4-\left(-3x^4+6x^3+9x^2\right)}{\left(x^3-2\right)^2}$$

Vậy: $y' = \dfrac{x^4-4x^3-9x^2+4x-4}{\left(x^3-2\right)^2}$

Đề 348: Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; b) $y = \dfrac{x^2-x+1}{2-x}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y' = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

b) $y' = \dfrac{\left(x^2-x+1\right)'(2-x)-\left(x^2-x+1\right)(2-x)'}{(2-x)^2}$

$$= \frac{(2x-1)(2-x)+\left(x^2-x+1\right)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-1}{(2-x)^2}$$

Đề 349: Giải bất phương trình sau: y' < 0 với $y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{x^2+x+2}{x-1}$$

$$y' = \frac{\left(x^2+x+2\right)'(x-1)-\left(x^2+x+2\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)(x-1)-\left(x^2+x+2\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+	0	−		−	0	+	
$(x - 1)^2$		+		+	0	+		+	
y'		+	0	−		−	0	+	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y' < 0$ là: $S = (-1; 1) \cup (1; 3)$.

Đề 350: Giải các bất phương trình sau:

a) $y' \geq 0$ với $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$;

b) $y' \leq 0$ với $y = \dfrac{(x + 1)^2}{x + 2}$;

c) $y' > 0$ với $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$.

Hướng dẫn giải

a) **Đáp số**: $S = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

b) **Đáp số**: $S = [-3; -2) \cup (-2; -1]$.

c) **Đáp số:** $S = \left(\dfrac{1 - \sqrt{19}}{2}; \dfrac{1 + \sqrt{19}}{2}\right)$.

Đề 351: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$ b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Hướng dẫn giải

a) $y = 5\sin x - 3\cos x \Rightarrow y' = (5\sin x - 3\cos x)' = 5\cos x + 3\sin x$.

b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \Rightarrow y' = \left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)'$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Đề 352: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x\cot x$ b) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$

Hướng dẫn giải

a) $y = x\cot x \Rightarrow y' = (x)'\cot x + x(\cot x)' \Rightarrow y' = \cot x + x\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

Vậy: $y' = \cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$.

b) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' + \left(\frac{x}{\sin x}\right)'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\sin x)'.x - (x)'.\sin x}{x^2} + \frac{(x)'.\sin x - x.(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x.\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= (x.\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Đề 353: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan\dfrac{x+1}{2}$ b) $y = \dfrac{x\sin x}{1+\tan x}$

Hướng dẫn giải

a) $y = \tan\dfrac{x+1}{2} \Rightarrow y' = \left(\tan\dfrac{x+1}{2}\right)'$

$$= \left(\frac{x+1}{2}\right)'\left[1 + \tan^2\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \tan^2\left(\frac{x+1}{2}\right)\right].$$

b) $y = \dfrac{x\sin x}{1+\tan x} \Rightarrow y' = \dfrac{(x\sin x)'(1+\tan x) - (x\sin x)(1+\tan x)'}{(1+\tan x)^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\sin x + x\cos x)(1+\tan x) - x.\sin x(1+\tan^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan x)\cos^2 x(\sin x + x\cos x) - x\sin x}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}.$$

Đề 354: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$ b) $y = \sin(\sin x)$

Hướng dẫn giải

a) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(1 + 2\tan x)'}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1 + 2\tan x}} = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1 + 2\tan x}}.$$

b) $y = \sin(\sin x) \Rightarrow y' = (\sin x)'\cos(\sin x) = \cos x.\cos(\sin x)$.

Đề 355: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$ b) $y = \sin^2(\cos 3x)$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \sin\sqrt{1 + x^2} \Rightarrow y' = \left(\sqrt{1 + x^2}\right)'\cos\sqrt{1 + x^2} = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\cos\sqrt{1 - x^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\cos\sqrt{1 + x^2}.$$

b) $y = \sin^2(\cos 3x) \Rightarrow y' = 2\sin(\cos 3x).[\sin(\cos 3x)]'$

$= 2\sin(\cos 3x).(\cos 3x)'.\cos(\cos 3x)$

$= -6\sin(\cos 3x).\sin 3x.\cos(\cos 3x)$

Đề 356: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

Tính $f'(x); f'(0); f'(\pi); f'\left(\frac{\pi}{2}\right); f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $*f'(x) = \dfrac{(\cos x)'(1 + \sin x) - \cos x(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)^2}$

$$= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x(\cos x)}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x + 1}{(1 + \sin x)^2} = \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$* \ f'(0) = -\frac{1}{1+\sin 0} = -1$$

$$f'(\pi) = -\frac{1}{1+\sin\pi} = -1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Đề 357: Tính $\frac{f'(1)}{\varphi'(1)}$, biết rằng $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$

$$\varphi'(x) = 4 + \left(\frac{\pi x}{2}\right)'\cos\frac{\pi x}{2} = 4 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \varphi'(1) = 4 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 4$$

Vậy: $\frac{f'(1)}{\varphi'(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Đề 358: Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Tìm tập giá trị của $f'(x)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = 2.2[\cos(4x - 1)]'\cos(4x - 1)$

$$= -4(4x-1)'\sin(4x-1).\cos(4x-1)$$

$$= -16\sin(4x-1).\cos(4x-1)$$

$$= -8\sin(8x-2)$$

Vì: $-1 \le \sin(8x - 2) \le 1$ nên: $-8 \le f'(x) \le 8$

Vậy tập giá trị của $f'(x)$ là đoạn: $[-8; 8]$.

Đề 359: Chứng minh rằng hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x.\cos^2 x\right) + 3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x.\cos^2 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1$$

$\Rightarrow y' = 0$.

Vậy y' không phụ thuộc x.

Đề 360: Chứng minh rằng các hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x:

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - \sin^2 x$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - \sin^2 x$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)\right] + \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)\right] + \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] - 2\sin^2 x$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] - 2\sin^2 x$$

$$= 2 + \cos\frac{2\pi}{3}.\cos 2x + \cos\frac{4\pi}{3}.\cos 2x - 2\sin^2 x$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin^2 x$$

$$= 2\left(1 - \sin^2 x\right) - \cos 2x$$

$= 2\cos^2 x - \left(2\cos^2 x - 1\right)$

$= 1$

$\Rightarrow y' = 0$

Vậy y' không phụ thuộc x.

Đề 361: Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng:

$f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sin x + 4\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x - 4\cos x = 5$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1 \quad (1)$

Đặt: $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{3}{5} \\ \sin\varphi = \frac{4}{5} \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \sin x.\cos\varphi - \sin\varphi.\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \varphi\right) = 1$

$\Leftrightarrow x - \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi\left(k \in Z\right)$

Đề 362: Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x) + \cos x$, biết rằng

$f(x) = x^3 + x - \sqrt{2} + \sin x$; $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 1 + \cos x$; $\quad g'(x) = 6x + 1$

$f'(x) > g'(x) + \cos x \Leftrightarrow 3x^2 + 1 + \cos x > 6x + 1 + \cos x$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0$

$\Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Đề 363: Chứng minh rằng: $2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right).f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f'(0)-f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

trong đó $f(x)'=\cos x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

Do đó: * $VT=2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right).f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\qquad(1)$$

* $VP=f'(0)-f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=-\sin 0-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\qquad(2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right).f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f'(0)-f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

C/ TOÁN ĐỀ NGHỊ

Đề 364:

1. Cho hàm số hữu tỉ $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ có miền xác định D. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

a) $D=\{x/Q(x)\neq 0\}$

b) $D=R\setminus\{x/Q(x)=0\}$

c) $y'=\frac{P'(x)Q(x)-P(x).Q'(x)}{Q^2(x)}\quad(x\in D)$

d) $y'=\frac{P'(x)}{Q'(x)}\quad(x\in D)$.

2. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

a) $(\sin x)'=\cos x$;

b) $(\cos x)'=-\sin x$

c) $\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

d) $\left(\cot\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}$.

Đề 365:

1. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$. Đáp số là:

a) 0; b) 1; c) 2; d) $\dfrac{1}{2}$.

2. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$. Đáp số là:

a) 1; b) 2; c) $\dfrac{1}{2}$; d) 0.

Đề 366:

1. Đạo hàm của hàm số: $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ là:

a) $y'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$; b) $y'=\dfrac{1}{(x+2)^2}$;

c) $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}$; d) $y'=-\dfrac{5}{(x+2)^2}$

2. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $y'\le 0$ là:

a) $[-2;-1)\cup(-1;0]$; b) $[-2;0]$;

c) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; d) $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.

Đề 367:

1. Nếu $f(x)=\sin 3x+4\cos\dfrac{x}{2}$ thì $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

a) 4; b) 2; c) – 2; d) – 4.

2. Nếu $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x$ thì f'(1) bằng:

a) 0; b) sin1;

c) cos1; d) $\sin^2 1.\cos^2 1+\sin 1.\cos 1$.

Đề 368:

1. Đạo hàm của hàm số $y=\cos\sqrt{1+x^2}$ là:

a) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}$; b) $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}$;

c) $y'=-\sin\sqrt{1+x^2}$; d) $y'=\sin\sqrt{1+x^2}$.

2. Đạo hàm của hàm số y = cos(cosx) là:

a) y' = sinx.sin(cosx); **b) y' = –sinx.sin(cosx);**

c) y' = cosx.sin(cosx); **d) y' = –cosx.sin(cosx).**

Đề 369:

1. Cho f(x) = $x^2\sin(x-2)$. Khi đó f'(2) bằng:

a) –4; b) –8; c) 4; d) 8.

2. Cho f(x) = $3(\sin^4x + \cos^4x) - 2(\sin^6x + \cos^6x)$. Với giá trị nào của x thì f'(x) = 0?

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$; b) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in Z)$;

c) $x \in \varnothing$; d) $x \in R$.

Đề 370:

1. Đạo hàm của hàm số $y = \sin\frac{1}{x^2}$ là:

a) $y' = -2x\cos\frac{1}{x^2}$; b) $y' = 2x\cos\frac{1}{x^2}$;

c) $y' = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$; d) $y' = \frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$.

2. Cho $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$. Tập nghiệm của bất phương trình f'(x) ≤ 0 là:

a) $\varnothing$; b) R \ {2};

c) $\left(1-\sqrt{2};2\right) \cup \left(2;1+\sqrt{2}\right)$; d) $\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$.

3. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. Khi đó giá trị của f'(0) và $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt bằng:

a) $1; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; b) $\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$;

c) $\frac{1}{2}; \frac{2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$; d) $\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

D/ HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề 364:

1. Theo lí thuyết, $y' = \dfrac{P'(x)}{Q'(x)}$ là khẳng định sai.

Đáp án: Chọn d.

2. Áp dụng công thức $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Ta có: $\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)'}{\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$

Vậy khẳng định $\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ sai.

Đáp án: Chọn c.

Đề 365:

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2.\dfrac{\sin x}{x}.\cos x = 2.1.\cos 0 = 2$

Đáp án: Chọn c.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2.\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$.

Đáp án: Chọn b.

Đề 366:

1. Áp dụng công thức $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Ta có: $y' = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Đáp án: Chọn a.

2. Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$$y' \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x < -1 \text{ hoặc } -1 < x \le 0.$$

(Có thể lập bảng xét dấu để suy ra kết quả).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $[-2; -1) \cup (-1; 0]$

Đáp án: Chọn a.

Đề 367:

1. Ta có: $f'(x) = 3\cos 3x - 2\sin\frac{x}{2}$

Do đó: $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3.\cos\pi - 2\sin\frac{\pi}{6} = -3 - 1 = -4$.

Đáp án: Chọn d.

2. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$= 1$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$.

Vậy: $f'(1) = 0$.

Đáp án: Chọn a.

Đề 368:

1. $y = \cos\sqrt{1 + x^2}$

$$\Rightarrow y' = -\left(\sqrt{1 + x^2}\right)'\sin\sqrt{1 + x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\sin\sqrt{1 + x^2}.$$

Đáp án: Chọn b.

2. $y = \cos(\cos x) \Rightarrow y' = -(\cos x)'\sin(\cos x) = \sin x.\sin(\cos x)$

Đáp án: Chọn a.

Đề 369:

1. Ta có: $f'(x) = (x^2)'\sin(x - 2) + x^2[\sin(x - 2)]'$

$$= 2x\sin(x - 2) + (x - 2)'x^2\cos(x - 2)$$

$$= 2x\sin(x - 2) + x^2\cos(x - 2)$$

Vậy: $f'(2) = 4\sin 0 + 4\cos 0 = 4$

Đáp án: Chọn c.

2. $\forall x \in R$, ta có:

$$f(x) = 3(\sin^4x + \cos^4x) - 2[(\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x.\cos^2x)]$$

$$= 3\left(\sin^4x + \cos^4x\right) - 2\left(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x\cos^2x\right)$$

$$= \sin^4x + \cos^4x + 2\sin^2x.\cos^2x$$

$$= \left(\sin^2x + \cos^2x\right)^2 - 2\sin^2x\cos^2x + 2\sin^2x.\cos^2x$$

$$= 1$$

$\Rightarrow f'(x) = 0.$

Vậy: $\forall x \in R$ ta đều có $f'(x) = 0$.

Đáp án: Chọn d.

Đề 370:

1. $y' = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' \cos\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{\left(x^2\right)'}{x^4}\cos\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{2}{x^3}\cos\dfrac{1}{x^2}$.

Đáp án: Chọn c.

2. Ta có: $f'(x) = \dfrac{\left(x^2 - 5x + 4\right)'(x-2) - \left(x^2 - 5x + 4\right)(x-2)'}{(x-2)^2}$

$$= \frac{(2x-5)(x-2) - \left(x^2 - 5x + 4\right)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2}$$

Do đó: $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2} \le 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Đáp án: Chọn a.

3. $f'(x) = \dfrac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2}$

$$= \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x.(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

Vậy: $f'(0) = \dfrac{1}{1 + \cos 0} = \dfrac{1}{2}$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1 + \cos\dfrac{\pi}{4}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

Đáp án: Chọn d.

§4. VI PHÂN

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Định nghĩa*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in (a; b)$.

Định nghĩa.

Ta gọi tích $f(x)\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x ứng với số gia Δx.

Kí hiệu: $df(x) = f'(x)\Delta x$

hoặc $dy = f'(x)\Delta x$

Chú ý.

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$ thì $dx = (x)'.\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$

Vì vậy, ta có: $\boxed{df(x) = f'(x)dx}$

hoặc $\boxed{dy = f'(x)dx}$

2. *Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng*

Với $|\Delta x|$ đủ nhỏ, ta có:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x}$$

Đây là công thức tính gần đúng đơn giản nhất.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 371: Tìm vi phân của các hàm số sau

a) $y = \sin x + \cos x$; b) $y = \sin x - x\cos x$

Hướng dẫn giải

a) $y' = \cos x - \sin x$. Vậy: $dy = (\cos x - \sin x)dx$.

b) $y' = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$. Vậy: $dy = x\sin x dx$

Đề 372: Tìm vi phân của các hàm số sau

a) $y' = \dfrac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}$; b) $y = \dfrac{1}{x^3}$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = \dfrac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}$. Vậy: $dy = \dfrac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}dx$

b) $y' = -\dfrac{3}{x^4}$. Vậy: $dy = -\dfrac{3}{x^4}dx$.

Đề 373: Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$. b) $y = \left(x^2 + 4x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

$\Rightarrow dy = y'dx = \dfrac{dx}{2(a+b)\sqrt{x}}$

b) $y = \left(x^2 + 4x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$

$\Rightarrow y' = (2x+4)\left(x^2 - \sqrt{x}\right) + \left(x^2 + 4x + 1\right)\left(2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$\Rightarrow dy = y'dx = \left[2(x+2)\left(x^2 - \sqrt{x}\right) + 2\left(x^2 + 4x + 1\right)\left(x - \dfrac{1}{4\sqrt{x}}\right)\right]dx$

Đề 374: Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \tan^2 x$ b) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \tan^2 x \Rightarrow y' = 2\tan x(\tan x)' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} \Rightarrow dy = y'dx = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}dx$.

b) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{(\cos x)'\left(1 - x^2\right) - \cos x\left(1 - x^2\right)'}{\left(1 - x^2\right)^2} = \dfrac{-\sin x.\left(1 - x^2\right) - \cos x(-2x)}{\left(1 - x^2\right)^2}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{2x\cos x + \left(x^2 - 1\right)\sin x}{\left(1 - x^2\right)^2} \Rightarrow dy = y'dx = \dfrac{2x\cos x + \left(x^2 - 1\right)\sin x}{\left(1 - x^2\right)^2}dx$

Đề 375: Không dùng máy tính và bảng số, tính gần đúng giá trị: $\sqrt{4,01}$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x.$$

Với: $x_0 = 4$; $\Delta x = 0,01$, ta được:

$$f(4,01) \approx f(4) + f'(4).0,01 \Rightarrow \sqrt{4,01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}.0,01$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{4,01} \approx 2 + \frac{0,01}{4} \Rightarrow \sqrt{4,01} \approx 2,0025$$

Đề 376: Không dùng máy tính và bảng số, tính gần đúng giá trị: $\cos 61^0$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số: $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

Áp dụng công thức tính gần đúng: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Với: $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$; $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$ ta được:

$$\cos 61^0 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$$

$$= f\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{1}{2} - \sin\frac{\pi}{3}.\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{180} \approx 0,485$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 377:

1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Công thức nào sau đây dùng để tính vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x.

   a) $dy = f(x)dx$; b) $df(x) = f(x)dx$;

   c) $dy = f'(x)dx$; d) Cả a, b, c đều sai.

2. Vi phân của hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ là:

a) $dy = -\frac{2}{x^3}dx$; b) $dy = \frac{1}{x^2}dx$;

c) $dy = \frac{2}{x^3}dx$; d) $dy = -\frac{1}{x}dx$.

Đề 378:

1. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

a) $d\left(x^3 - 5x + 1\right) = \left(3x^2 - 5\right)dx$;

b) $d(\sin x + \cos x) = (\cos x - \sin x)dx$;

c) $d(\sin^2 x) = \sin 2x dx$;

d) $d(\cos^2 x) = \sin 2x dx$.

2. Tìm vi phân của hàm số: $f(t) = \sin\omega t$ (ω là hằng số)

a) $df(t) = \cos\omega t dt$; b) $df(t) = t\cos\omega t dt$

c) $df(t) = \omega\cos\omega t dt$; d) $df(t) = -\omega\cos\omega t dt$.

3. Công thức nào sau đây là công thức tính gần đúng đơn giản nhất:

a) $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f\left(x_0\right).\Delta x$

b) $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f'\left(x_0\right) + f\left(x_0\right).\Delta x$

c) $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f'\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right).\Delta x$

d) $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right).\Delta x$.

D/ HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề 377:

1. Theo lí thuyết ta có: $dy = f'(x)dx$

Đáp án: Chọn c.

2. $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{\left(x^2\right)'}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$

Vậy: $dy = -\frac{2}{x^3}dx$.

Đáp án: Chọn a.

Đề 378:

1. Ta có: $d(\cos^2x) = (\cos^2x)'dx$

$$= 2(\cos x)'\cos x dx = -2\sin x.\cos x dx$$
$$= -\sin 2x dx$$

Vậy d sai.

Đáp án: Chọn d.

2. Ta có: $df(t) = f'(t)dt = (\omega t)'\cos\omega dt = \omega\cos\omega t dt$.

Vậy c đúng.

Đáp án: Chọn c.

3. Theo lí thuyết d đúng.

Đáp án: Chọn d.

§5. ĐẠO HÀM CẤP CAO

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$.

Đạo hàm của hàm số $y' = f'(x)$ (nếu có) được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số: $y = f(x)$ và được ký hiệu là: y'' hay $f''(x)$.

Đạo hàm của hàm số: $y'' = f''(x)$ (nếu có) được gọi là đạo hàm cấp ba của hàm số: $y = f(x)$ và được ký hiệu là y''' hay $f'''(x)$.

Tổng quát: Đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số: $y = f(x)$ và được ký hiệu: $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$.

Vậy: $\boxed{f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' \quad (n \geq 2)}$

II. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét chuyển động xác định bởi phương trình $s = f(t)$.

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$.

B/ GIẢI TOÁN

Đề 379: Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$. b) $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

Hướng dẫn giải

a) $y = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$

$y' = 3x^2 + 6x + 5.$

$y'' = 6x + 6$

b) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

$y' = 4x^3 - 8x.$

$y'' = 12x^2 - 8$

Đề 380: Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{2x+1}{x-1}; \quad y' = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

$$y'' = \frac{3\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4} = \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}.$$

Đề 381: Tính y", biết rằng: $y = x\sqrt{1+x^2}$.

Hướng dẫn giải

$$y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Do đó: $y'' = \dfrac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

Đề 382: Tính y", biết rằng: y = tanx.

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y'' = -\frac{(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{2\cos x \sin x}{\cos^4 x}.$$ Do đó: $y'' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Đề 383: Tính đạo hàm theo cấp đã cho của các hàm số sau:

a) $f(x) = (x+10)^6, f''(2)$?

b) $f(x) = \cos^2 x, f^{(4)}(x)$?

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = 6(x+10)^5$

$f''(x) = 30(x+10)^4$. Do đó:

$f''(2) = 30.12^4 = 622080$

b) $f'(x) = 2(\cos x)'.\cos x = -2\sin x.\cos x = -\sin 2x$

$f''(x) = -2\cos 2x$; $f'''(x) = 4\sin 2x$, $f^{(4)}(x) = 8\cos 2x$

Đề 384: Tính đạo hàm theo cấp đã cho của hàm số sau:

$$f(x) = \sin 3x, f''\left(-\frac{\pi}{2}\right), f''(0), f''\left(\frac{\pi}{18}\right)?$$

Hướng dẫn giải

$f'(x) = 3\cos 3x$

$f''(x) = -9\sin 3x$

Vậy: * $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -9$

* $f''(0) = -9\sin 0 = 0$

* $f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{9}{2}$

Đề 385: Tính đạo hàm theo cấp đã cho của hàm số sau:

$$f(x) = \cos^2 2x, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) f''\left(-\frac{\pi}{24}\right), f'''\left(\frac{2\pi}{3}\right)?$$

Hướng dẫn giải

$f'(x) = 2(\cos 2x)'\cos 2x$

$= -4\sin 2x.\cos 2x = -2\sin 4x$

$f''(x) = -8\cos 4x$

$f'''(x) = 32\sin 4x$

Vậy: * $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 32\sin(-2\pi) = 0$

* $f'''\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 32.\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -16$

* $f'''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 32\sin\frac{8\pi}{3} = 32.\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$.

Đề 386: Chứng minh rằng hàm số sau đây thỏa mãn hệ thức tương ứng đã cho: $y = \frac{x-3}{x+4}$ thỏa: $2y'^2 = (y-1)y''$

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{x-3}{x+4}; \qquad y' = \frac{7}{(x+4)^2}; \qquad y'' = -\frac{14}{(x+4)^3}$$

Ta có: $VT = 2y'^2 = \frac{98}{(x+4)^4}$

$$VP = (y-1)y'' = \left(\frac{x-3}{x+4} - 1\right).\left[-\frac{14}{(x+4)^3}\right]$$

$$= \frac{-7}{(x+4)}.\frac{-14}{(x+4)^3} = \frac{98}{(x+4)^4}.$$

Vậy: VT = VP. Tức là: $2y'^2 = (y-1)y''$

Đề 387: Chứng minh rằng hàm số sau đây thỏa mãn hệ thức tương ứng đã cho: $y = \sqrt{2x - x^2}$ thỏa: $y^3y'' + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

$$y = \sqrt{2x - x^2}; \qquad y' = \frac{\left(2x - x^2\right)'}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$y'' = \frac{(1-x)'\sqrt{2x - x^2} - (1-x).\left(\sqrt{2x - x^2}\right)'}{\left(\sqrt{2x - x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1-x).\frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}}{\left(2x - x^2\right)}$$

$$= \frac{-\left(2x - x^2\right) - (1 - x)^2}{\left(2x - x^2\right)\sqrt{2x - x^2}} = -\frac{1}{\left(2x - x^2\right)\sqrt{2x - x^2}}$$

Ta có: $VT = y^3y'' + 1 = \left(\sqrt{2x - x^2}\right)^3 . \frac{-1}{\left(2x - x^2\right)\sqrt{2x - x^2}} + 1 = -1 + 1$

$= 0 = VP$

Vậy: $y^3y'' + 1 = 0$

Đề 388: Chứng minh rằng hàm số sau đây thỏa mãn hệ thức tương ứng đã cho: $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$ thỏa: $y'' + \omega^2 y = 0$.

Trong đó: A; B; ω; φ là những hằng số.

Hướng dẫn giải

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y' = A\omega\cos(\omega t + \varphi) - B\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$y'' = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) - B\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Ta có:

$VT = y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) - B\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) + B\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$

$= 0 = VP$

Vậy: $y'' + \omega^2 y = 0$.

Đề 389: Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{x}$. b) $y = \frac{1}{x + 1}$. c) $y = \frac{1}{x(x + 1)}$

Hướng dẫn giải

a) $y = \frac{1}{x}$.

$$y' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 . \frac{1!}{x^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{x^3} = (-1)^2 . \frac{2!}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{1.2.3}{x^4} = (-1)^3\frac{3!}{x^4}$$

……………………………

Dự đoán: $y^{(n)} = (-1)^n.\frac{n!}{x^{n+1}}$ (*)

Ta dùng qui nạp để chứng minh công thức (*).

Khi n = 1: Ta có: $y' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^{-1}.\frac{1!}{x^2}$

Công thức (*) đúng.

Giả sử (*) đúng với n = k. Nghĩa là: $y^{(k)} = (-1)^k.\frac{k!}{x^{k+1}}$

$$\Rightarrow y^{(k+1)} = -(-1)^k.\frac{k!(k+1)}{x^{K+2}} = (-1)^{k+1}.\frac{(k+1)!}{x^{(k+1)+1}}$$

Tức là (*) đúng với n = k + 1

Vậy: $\forall x \in N$, ta có: $y^{(n)} = (-1)^n.\frac{n!}{x^{n+1}}$.

b) $y = \frac{1}{x+1}$

$$y' = -\frac{1}{(x+1)^2} = (-1)^1\frac{1!}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{(x+1)^3} = (-1)^2.\frac{2!}{(x+1)^3}$$

$$y''' = -\frac{1.2.3}{(x+1)^4} = (-1)^3.\frac{3!}{(x+1)^4}$$

……………………………

Dự đoán: $y^{(n)} = (-1)^n.\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

Học sinh dùng qui nạp để chứng minh công thức này.

c) Ta có: $y = \frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Áp dụng kết quả câu a) và b) ta có:

$$y^{(n)} = (-1)^n.\frac{n!}{x^{n+1}} - (-1)^n.\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n n!\left[\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

Đề 390: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số: $y = \sin x$

Hướng dẫn giải

$y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \sin\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

Học sinh dùng qui nạp để chứng minh công thức này.

Đề 391: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số: $y = \cos x$

Hướng dẫn giải

$y = \cos x$

$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$

$y''' = -\sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \cos\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

Học sinh dùng qui nạp để chứng minh công thức này.

Đề 392: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$s = \frac{1}{2}\left(3t^2 + t^4\right)$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

Tìm vận tốc và gia tốc của chuyển động tại $t = 4$.

Hướng dẫn giải

$s = \frac{1}{2}\left(3t^2 + t^4\right)$; $s' = \frac{1}{2}\left(6t + 4t^3\right) = 3t + 2t^3$; $s'' = 3 + 6t^2$.

- Vận tốc của chuyển động tại t = 4 là: $s'(4) = 3.4 + 2.4^3 = 140$.

  Vậy vận tốc cần tìm là: 140m/s.

- Gia tốc của chuyển động tại t = 4 là: $s''(4) = 3 + 6.4^2 = 99$.

  Vậy gia tốc cần tìm là 99m/s^2.

Đề 393: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tính vận tốc khi t = 2.

b) Tính gia tốc khi t = 3.

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu.

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Hướng dẫn giải

$s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$; $s' = 3t^2 - 6t - 9$; $s'' = 6t - 6$

a) Vận tốc khi t = 2 là: $s'(2) = 3.2^2 - 6.2 - 9 = -9$ (m/s).

b) Gia tốc khi t = 3 là: $s''(3) = 6.3 - 6 = 12$ (m/s^2).

c) Vận tốc triệt tiêu ⇔ $s' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ (\text{loại}) \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 3$$

Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

$s''(3) = 6.3 - 6 = 12$ (m/s^2).

d) Gia tốc triệt tiêu ⇔ $s'' = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 \Leftrightarrow t = 1$.

Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là:

$s'(1) = 3.1^2 - 6.1 - 9 = -12$ (m/s).

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Đề 394:

1. Nếu $f(x) = (2x + 1)^{10}$ thì $f'''(0)$ bằng:

a) 720;   b) 5760;   c) 360;   d) 2880.

2. Nếu $f(x) = \sin^2 x$ thì $f^{(4)}(\pi)$ bằng:

a) -8; b) 8; c) -1; d) 1.

Đề 395:

1. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = f(t)$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

a) $f'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

b) $f'(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

c) $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

d) $f^{(3)}(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

2. Cho hàm số: $y = x^4 - x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $y'' \le 0$ là:

a) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; b) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$;

c) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; d) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Đề 396:

1. Cho hàm số: $y = \cos 3x$. Nghiệm của phương trình $y''' = 27$ là:

a) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$ $(k \in Z)$; b) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in Z)$;

c) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$ $(k \in Z)$; d) Vô nghiệm.

2. Nếu $f(x) = \frac{1}{x+1}$ thì $f''(1)$ bằng:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) 2; d) 4.

Đề 397:

1. Nếu $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ thì $f''(3)$ bằng:

a) 2; b) -2; c) 3; d) -3.

2. Cho hàm số: $y = \frac{1}{x}$. Khi đó $x^3 y'''$ bằng:

a) $2x$; b) $6x$; c) -6; d) 6.

Đề 398:

1. Cho hai hàm số f(x) = sinx, g(x) = cosx. Nghiệm của phương trình f'(x) = g''(x) + 1 là:

a) $x = k2\pi$ ($k \in Z$); b) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in Z)$;

c) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$; d) Vô nghiệm.

2. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$s = \frac{1}{3}\left(t^2 + t^4\right)$ (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Khi đó vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 3 theo thứ tự là:

a) $\frac{110}{3}m/s; 38m/s^2$; b) $\frac{110}{3}m/s; 36m/s^2$;

c) $36m/s; 36m/s^2$; d) $38m/s; \frac{110}{3}m/s^2$.

D/ HƯỚNG DẪN GIẢI

Đề 394:

1. Ta có: $f'(x) = 10.2(2x+1)^9 = 20(2x+1)^9$

$$f''(x) = 360(2x+1)^8$$

$$f'''(x) = 5760(2x+1)^7$$

Vậy: $f'''(0) = 5760(0-1)^7 = 5760$.

Đáp án: Chọn câu b.

2. $f'(x) = 2\cos x.\sin x = \sin 2x$

$f''(x) = 2\cos 2x.$

$f'''(x) = -4\sin 2x.$

$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x$

Do đó: $f^{(4)}(\pi) = -8\cos 2\pi = -8$.

Đáp án: Chọn câu a.

Đề 395:

1. Theo lí thuyết: b. đúng.

Đáp án: Chọn câu b.

2. $y' = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

$y'' = 12x^2 - 6x - 6$

$y'' \le 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6x - 6 \le 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Đáp án: Chọn câu d.

Đề 396:

1. $y' = -3\sin 3x$

$y'' = -9\cos 3x$

$y''' = 27\sin 3x$

$y''' = 27 \Leftrightarrow 27\sin 3x = 27$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in Z)$$

Đáp án: Chọn câu c.

2. $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. $\qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

Vậy: $f''(1) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$.

Đáp án: Chọn câu b.

Đề 397:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = x - 1 + \frac{1}{x - 2}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$

Vậy: $f''(3) = 2$.

Đáp án: Chọn câu a.

2. $y' = -\frac{1}{x^2}$. $y'' = \frac{2}{x^3}$. $y''' = -\frac{6}{x^3}$

Vậy: $x^3y''' = -6$.

Đáp án: Chọn câu c.

Đề 398:

1. $f'(x) = \cos x$. $g'(x) = -\sin x$. $g''(x) = -\cos x$

Do đó: $f'(x) = g''(x) + 1 \Leftrightarrow \cos x = -\cos x + 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in Z).$$

Đáp án: Chọn câu c.

2. $s' = \frac{1}{3}(2t + 4t^3)$. $s'' = \frac{1}{3}(2 + 12t^2) = \frac{2}{3} + 4t^2$.

* Vận tốc tại thời điểm t = 3 là:

$$s'(3) = \frac{1}{3}(2.3 + 4.3^3) = 2 + 36 = 38(m/s).$$

* Gia tốc tại thời điểm t = 3 là:

$$s''(3) = \frac{2}{3} + 4.3^2 = \frac{110}{3}(m/s^2).$$

Đáp án: Chọn câu d.

BÀI ĐỌC THÊM

QUY TẮC L'HOSPITAL

(Sử dụng quy tắc L'Hospital để làm toán trắc nghiệm sẽ cho kết quả nhanh)

A/ TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Quy tắc L'Hospital

Cho hai hàm số f(x) và g(x) có đạo hàm và $g(x) \neq 0$ trong khoảng (a; b) chứa x_0.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Chú ý: 1. Quy tắc trên vẫn đúng khi $x \to \infty$.

2. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ thì ta có thể áp dụng tiếp quy tắc trên.

B/ CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{5x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (Dạng $\frac{0}{0}$) $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{5x}$ (Dạng $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sin(\sin x)\right]'}{(5x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'\cos(\sin x)}{5}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos(\sin x)}{5}=\frac{1}{5}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ (Dạng $\dfrac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x} \text{ (Dạng } \frac{0}{0}\text{)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1} = 2$$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-1)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{1} = 3$. (Dạng $\dfrac{0}{0}$)

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2+3x+2)'} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{2x+3} = -2$. (Dạng $\dfrac{0}{0}$)

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+1}{2x^3-x}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-2x+5)'}{(x^2-1)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-2}{2x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(2x-2)'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 1\text{. (Dạng } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+1}{2x^3-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3+2x+1)'}{(2x^3-x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{6x^2-1}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+2)'}{(6x^2-1)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{12x} = \frac{1}{2}\text{ . (Dạng } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

Ví dụ 4. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right]$$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$ có dạng $\infty - \infty$, chưa có dạng $\dfrac{0}{0}$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}\ \text{(Dạng } \frac{0}{0}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{2x}=\frac{3}{2}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG 5

TOÁN TRẮC NGHIỆM

Đề 399:

1. Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hệ số góc k của tiếp tuyến của (C) tại điểm I(1; 0) là:

   A. $k = 0$; B. $k = -3$; C. $k = 3$; D. $k = 2$.

2. Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc $k = -3$ là:

   A. $y = -3x + 3$; B. $y = -3x$;

   C. $y = -3x + 1$; D. $y = -3x + 3$ và $y = -3x - 3$.

3. Cho đường cong (C): $y = x^3 + 3x^2 - 3$, phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 24$ là:

   A. $y = 9x$; B. $y = 9x + 24$ và $y = 9x - 8$;

   C. $y = 9x - 8$; D. $y = 9x - 8$ và $y = 9x$.

4. Cho đường cong (C): $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A \in (C)$ với $x_A = 2$ là:

   A. $y = 2x + 1$; B. $y = 2x - 1$;

   C. $y = -2x$; D. $y = 0$.

5. Cho chuyển động có phương trình: $s = t^2 + 2t$. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là:

   A. 8 m/s; B. 6 m/s; C. 4 m/s; D. 2m/s .

6. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' < 0$ là:

A. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;   B. $(0; 2)$;

C. $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$;   D. $(-2; 0)$.

7. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;   B. $\left[\sin(\sin x)\right]' = \cos x.\cos(\sin x)$;

C. $(\text{tg}x)' = 1 + \text{tg}^x x$;   D. $\left(\sqrt[3]{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^2 + 1}}$.

8. Cho hàm số: $f(x) = x^4 + x^2 - 1$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $f'(1) = 6$; $f''(5) = 60$;   B. $f'(1) = 6$; $f''(0) = 2$;

C. $f'(0) = 0$; $f''(1) = 14$;   D. $f'(-1) = -6$; $f''(2) = 50$.

9. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $(\cot gx)' = -\left(1 + \cot g^2 x\right)$;

B. $(\cot gx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

C. $\left[\cos(\sin x)\right]' = -\cos x \sin(\cos x)$;

D. $(\cos 5x)' = -5\sin 5x$.

10. Cho hàm số: $y = x^3 + 3x - 5$. Tập nghiệm của phương trình $y' = y''$ là:

A. $\{0; 1\}$;   B. $\{-1; 1\}$;   C. $\{1\}$;   D. $\{-1\}$.

Đề 400:

1. Cho hàm số $y = x^4 + mx^3 - 2x^2 + 5$. Tìm m để phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \varnothing$;   B. $m \in R$;

C. $-4 \le m \le 12$;   D. $-4 < m < 12$.

2. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 - 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y'' \ge 0$ là:

A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;   B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

C. $(-1; 1)$;   D. $[-1; 1]$.

3. **Cho hàm số** $y = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Tập nghiệm của phương trình **y" = 0 là:**

A. $\varnothing$; B. {0; 2}; C. {0}; D. {–2; 0}.

4. **Cho hàm số** $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x + 2x + 3$. Tìm y''. Chọn phương **án đúng nhất.**

A. $y'' = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$; B. $y'' = -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

B. $y'' = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$; D. Cả a, b, c đều đúng.

5. **Cho hàm số** $y = \dfrac{2x^2 + x - m^2}{x+1}$. Với giá trị nào của m thì phương **trình** y' = 0 có hai nghiệm phân biệt?

A. $-1 < m < 1$; B. $m < -1$ hoặc $m > 1$;

C. $m \in \varnothing$; D. $m \in R$.

6. **Cho hàm số:** $y = \sqrt{1 + x^2}$. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $(1 + x^2)y' = y$; B. $(1 + x^2)y' = xy$;

C. $(1 + x^2)y' = x^2y$; D. $(1 + x^2)y' = x^3y$.

7. **Cho hàm số** $y = x\sqrt{1 + x^2}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = \dfrac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}}dx$; B. $dy = \dfrac{1 + 2x}{\sqrt{1 + x^2}}dx$;

C. $dy = \dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{1 + x^2}}dx$; D. $dy = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}dx$.

8. **Tìm vi phân của hàm số** $y = x\cot g^2x$.

A. $dy = \left(\cot g^2x + \dfrac{2x\cos x}{\sin^3 x}\right)dx$; B. $dy = \left(\cot g^2x - \dfrac{2x\cos x}{\sin^3 x}\right)dx$;

C. $dy = \left(\cot g^2x + \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}\right)dx$; D. $dy = \left(\cot g^2x - \dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}\right)dx$.

9. **Cho f(x) = 2x + sinx.** Tập nghiệm của bất phương trình f'(x) > 0 là:

A. $\varnothing$; B. R;

C. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$; D. $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi / k \in Z\right\}$.

10. Cho $f(x) = x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 1$. Tìm a để $f'(x) > 0, \forall x$.

A. $a < -5$ hoặc $a > 7$; B. $a \le -5$ hoặc $a \ge 7$;

C. $-5 \le a \le 7$; D. $-5 < a < 7$.

11. Trên đường cong (C): $y = 4x^2 - 6x + 3$ hãy tìm điểm tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x - 12$.

A. (2; 7); B. (–1; 13); C. (1; 1); D. (0; 3).

12. Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C). Xác định a, b, c sao cho đồ thị (C) đi qua các điểm (1; 3), (–1; –3) và $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

A. $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$; B. $b = -1$, $c = 2$, $d = 1$;

C. $b = -1$, $c = -2$, $d = 1$; D. $b = 1$, $c = -2$, $d = 1$.

13. Cho $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$. Khi đó f'(1), f'(2), f'(3) theo thứ tự lần lượt là:

A. –8 , 0 , 1; B. –8, 1, 0; C. –8, 0, 0; D. –8, 0, –1.

14. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.

A. $y' = \frac{2}{\sin^2 x}$; B. $y' = -\frac{2}{\sin^2 x}$;

B. $y' = \frac{2}{\cos^2 x}$; D. $y' = -\frac{2}{\cos^2 x}$.

15. Cho hàm số $y = 3\sin^2 x.\cos x + \cos^2 x$. Tìm phương án đúng nhất trong các phương án sau:

A. $y' = \sin x\left(6\cos^2 x - 3\sin^2 x - 2\cos x\right)$;

B. $y' = \sin x\left(6 - 9\sin^2 x - 2\cos x\right)$;

C. $y' = \sin x\left(9\cos^2 x - 2\cos x - 3\right)$;

D. Cả a, b, c đều đúng.

ĐÁP ÁN

Đề 399: 1. B. 2. A. 3. C. 4. D. 5. B.
6. D. 7. D. 8. A. 9. C. 10. C.

Đề 400: 1. B. 2. B. 3. C. 4. D. 5. A. 6. B. 7. A.
8. B. 9. B. 10. D. 11. C. 12. B. 13. C.
14. A. 15. D.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. Hàm số lượng giác 5

§2. Phương trình lượng giác cơ bản 17

§3. Một số phương trình lượng giác đơn giản 31

Ôn tập chương 1 52

Chương 2. TỔ HỢP, XÁC SUẤT

§1. Quy tắc đếm 58

§2. Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp 68

§3. Xác suất của biến cố 78

§4. Xác suất có điều kiện 88

§5. Biến ngẫu nhiên 91

§6. Kì vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên 95

Ôn tập chương 2 99

Chương 3. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. Phương pháp quy nạp toán học 102

§2. Dãy số 105

§3. Cấp số cộng 115

§4. Cấp số nhân 123

Ôn tập chương 3 129

Chương 4. GIỚI HẠN

§1. Giới hạn của dãy số 132

§2. Giới hạn của hàm số 143

§3. Hàm số liên tục 158

Ôn tập chương 4 166

Chương 5. ĐẠO HÀM

§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm 171

§2. Quy tắc tính đạo hàm 185

§3. Đạo hàm của hàm số hữu tỉ và hàm số lượng giác 197

§4. Vi phân 212

§5. Đạo hàm cấp cao 216

Bài đọc thêm 228

Quy tắc L'Hospital 228

Ôn tập chương 5 230

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH
Biên tập : Thu Hiền – Trần Hưng
Sửa bản in : Thái Văn
Trình bày bìa : Ngọc Anh

TUYỂN CHỌN 400 BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

Mã số: 1L-131 ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH in Bao bì Phong Tân

Số xuất bản: 58-2007/CXB/49-03/ĐHQGHN, ngày 22/1/2007.

Quyết định xuất bản số: 283 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.